

Transferul de căldură prin conducție termică prin peretele cilindric neomogen cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel

Heat transfer by thermal conduction through inhomogeneous cylindrical wall with layers with variable thermal conductivity with temperature solved in Microsoft Excel

Șef lucr. Dr. ing. Gelu-Adrian CHISĂLIȚĂ

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Facultatea de Instalații, Romania
gelu.chisalita@insta.utcluj.ro

DOI:10.37789/rjce.2020.11.2.5

Rezumat: *Lucrarea prezintă o modalitate de rezolvare a problemei transmiterii căldurii prin conducție termică în regim staționar printr-un perete cilindric neomogen (multistrat) cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura. Implementarea rezolvării este făcută în aplicația software Microsoft Excel® pentru a folosi instrumentul Solver cu scopul de a rezolva sistemul de ecuații neliniare direct dependent de temperaturile de pe suprafețele delimitatoare ale straturilor peretelui cilindric.*

Cuvinte cheie: *transfer, căldură, staționar, perete, cilindric, multistrat, sistem, ecuații, neliniare, Solver, Excel*

Abstract: *The paper presents a method for solving the steady-state heat transfer problem through a non-homogeneous / multilayered cylindrical shell having one or all layers with variable thermal conductivity. The Solver tool from Microsoft Excel® software application is used for solving the system of nonlinear equations directly dependent on the unknown temperatures on the bounding surfaces of the layers.*

Keywords: *transfer, heat, stationary, wall, cylindrical, multilayer, system, equations, nonlinear, solver, excel*

1. INTRODUCERE

Transmiterea căldurii prin conducție termică în regim staționar $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ prin corpuri fără surse interioare de căldură ($\dot{q}_{SIC} = 0$) este descrisă de către ecuația generală a conducției termice (ecuația lui FOURIER) exprimată în forma (1) [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] ș.a.

$$\nabla^2 t = 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

În cazul pereților cilindrici (PC) se utilizează relația (2)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

(axa Oz fiind axa cilindrului $\frac{\partial t}{\partial z} = 0$) și ecuația cercului (3)

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

După transformarea Laplacianului în coordonate cilindrice ecuația diferențială a câmpului de temperatură devine [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] ș.a.

$$\frac{\partial^2 t}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial t}{\partial R} = 0 \text{ sau } \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dR} \left(R \cdot \frac{dt}{dR} \right) = 0 \quad (4)$$

Integrând ecuația diferențială și aplicând condițiile la limită de specia 1 (DIRICHLET) se obțin relațiile cunoscute pentru ecuația câmpului de temperatură (5), fluxul termic unitar \dot{q} transmis (6) și fluxul termic total \dot{Q} transmis (7) [1], [2], [3], [4], [5] ș.a.

$$t = t_{si} - (t_{si} - t_{se}) \frac{\ln\left(\frac{d}{d_i}\right)}{\ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} \quad [^\circ\text{C}] \quad (5)$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta t}{R_t} = \frac{t_{si} - t_{se}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}}\right] \quad (6)$$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta t}{R_{tt}} = \frac{t_{si} - t_{se}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} \quad [\text{W}] \quad (7)$$

Relațiile de mai sus au fost determinate pornind de la ipoteza în care conductivitatea termică a materialului peretelui cilindric reprezintă o constantă $\lambda = \text{ct}$. În cazul în care conductivitatea termică λ variază cu temperatura pot fi folosite diverse expresii de calcul de forma liniară (8), polinomială (9) etc. [1], [3], [4], [7] ș.a.

$$\lambda = A \pm B \cdot T \quad (8)$$

$$\lambda = A \pm B \cdot T \pm C \cdot T^2 \pm D \cdot T^3 \quad (9)$$

Transferul de căldură prin conducție termică prin peretele cilindric neomogen cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel cu A, B, C și D coeficienți de material sau o relație simplă și practică (10) [1], [3], [4], [8] ș.a.

$$\lambda = \lambda_0 \cdot (1 \pm \beta \cdot t) \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right] \quad (10)$$

în care λ_0 reprezintă valoarea conductivității termice la o temperatură de referință, iar β este un coeficient numeric în funcție de material.

Rezolvarea clasică impune precizarea temperaturilor medii t_{med} ale straturilor peretelui cilindric neomogen (multistrat) folosind temperatura medie aritmetică

$$t_{med} = \frac{t_{si} + t_{se}}{2} \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (11)$$

și utilizarea conductivității termice medii λ_{med}

$$\lambda_{med} = \lambda_0 \cdot (1 \pm \beta \cdot t_{med}) \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right] \quad (12)$$

pentru exprimarea și calculul fluxului termic unitar transmis

$$\dot{q} = \frac{t_{si} - t_{se}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{med}} \cdot \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \right] \quad (13)$$

Deoarece temperaturile pe suprafețele de contact între straturi nu sunt cunoscute trebuie rezolvat un sistem de N ecuații neliniare având ca N necunoscute aceste temperaturi.

În [8] a fost prezentată o metodă de soluționare a transferului termic prin pereți cilindrici multistrat (PCMS) având conductivitatea termică variabilă cu temperatura prin implementarea rezolvării problemei în aplicația software Mathcad®, soluționarea sistemului de ecuații neliniare format cu ajutorul unui bloc Given-Find, calculul valorilor temperaturilor pe suprafețele delimitatoare ale straturilor acestuia și determinarea fluxului termic unitar transmis prin conducție termică.

În lucrarea de față se prezintă o altă metodă de rezolvare a aceleiași probleme bazată pe utilizarea următoarei relații de exprimare a fluxului termic unitar [4] ș.a.

$$\dot{q} = \frac{\theta_{si} - \theta_{se}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_p} \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \right] \quad (14)$$

în care funcțiile parabolice de temperatură θ_{si} și θ_{se} se determină cu formulele [4] ș.a.

$$\theta_{si} = \left(t_{si} + \frac{1}{\beta}\right)^2 \quad [^{\circ}\text{C}^2] \quad (15)$$

$$\theta_{se} = \left(t_{se} + \frac{1}{\beta}\right)^2 \quad [^{\circ}\text{C}^2] \quad (16)$$

iar echivalența conductivității termice λ_p a unui strat component al PCMS folosind relația

$$\lambda_p = \frac{\lambda_0 \cdot \beta}{2} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}^2}\right] \quad (17)$$

Implementarea soluționării problemei a fost făcută în aplicația software Microsoft Excel® în vederea utilizării instrumentului Solver pentru rezolvarea sistemului de ecuații neliniare NxN care se formează și în acest caz.

Solver-ul operează cu un grup de celule corelate direct și/sau indirect cu o anumită celulă-țintă sau obiectiv care conține o valoare precizată de către utilizator sau care poate fi minimizată ori maximizată în cazul rezolvării unor probleme de optimizare. Instrumentul Solver modifică valorile inițiale din celulele indicate de către utilizator pentru a obține apoi în această celulă-țintă rezultatul urmărit având în vedere constrângerile (restricțiile) care precizează domeniul de soluții posibile și algoritmul de rezolvare selectat pentru problema respectivă.

Metoda de rezolvare propusă nu solicită un efort ridicat de implementare pe calculator, iar rezultatele numerice se obțin rapid fiind utilă și în analiza unor cazuri în care datele problemei pot suferi diverse modificări față de valorile inițiale adoptate în calcul.

2. IMPLEMENTAREA ȘI REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSFER TERMIC ÎN MICROSOFT EXCEL

Pentru a compara și verifica rezultatele obținute se propune implementarea pe calculator și rezolvarea unei probleme de transmitere a căldurii în regim termic

Transferul de căldură prin conducție termică prin pereții cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel staționar prin pereți cilindrici neomogeni având straturi cu conductivitatea termică variabilă cu temperatura similară cu cea formulată în [8] și enunțată astfel:

Să se determine fluxul termic unitar pierdut printr-o conductă de oțel $\phi 356 \times 8$ mm izolată cu două straturi de izolație termică cunoscând temperatura pe suprafața interioară $t_{si} = 300$ °C, temperatura pe suprafața exterioară $t_{se} = 50$ °C și caracteristicile straturilor specificate în următorul tabel.

TABELUL 1

Caracteristici straturi PCMS

Nr. strat	Material	Grosime [mm]	Conductivitate termică [W/m·K]
1	Oțel	$\phi 356 \times 8$	$\lambda_1 = 50$
2	Izolație termică nr. 1	30	$\lambda_2 = 0.35 \cdot (1 + 6.25 \cdot 10^{-4} \times t)$
3	Izolație termică nr. 2	50	$\lambda_3 = 0.23 \cdot (1 + 8 \cdot 10^{-4} \times t)$

Implementarea rezolvării cu ajutorul calculatorului a problemei formulate mai sus implică parcurgerea următoarelor etape principale.

Se definesc și se introduc ca date inițiale ale problemei (figura 1) conductivitatea termică de referință λ_{0n} și coeficientul numeric în funcție de material β_{0n} pentru fiecare dintre straturile componente ale PCMS, diametrul exterior al conductei d_e , grosimile straturilor δ_n și temperaturile t_{si} și t_{se} pe suprafața interioară, respectiv exterioară a PCMS (condițiile la limită de tip DIRICHLET).

Datele problemei			
Marime	Simbol	Valoare	UM
Constanta Lambda01	λ_{01}	50.0	W/mK
Constanta Beta1	β_1	0.00E+00	1/K
Constanta Lambda02	λ_{02}	0.35	W/mK
Constanta Beta2	β_2	6.25E-04	1/K
Constanta Lambda03	λ_{03}	0.23	W/mK
Constanta Beta3	β_3	8.00E-04	1/K
Diametru exterior conducta	d_e	356.0	mm
Grosime perete conducta	δ_1	8.0	mm
Grosime strat izolatie 1	δ_2	30.0	mm
Grosime strat izolatie 2	δ_3	50.0	mm
Temperatura suprafata interioara	t_{si}	300.0	C
Temperatura suprafata exterioara	t_{se}	50.0	C

Figura 1. Implementarea datelor inițiale ale problemei

Introducerea acestor valori se face parametrizat ca variabile astfel încât în cazul unor modificări aduse datelor inițiale ale problemei rezultatele urmărite să fie recalculat fără alte intervenții asupra implementării rezolvării prin formule facilitând obținerea rapidă a soluției dorite.

Se calculează diametrul interior al conductei cu relația

$$d_i = d_e - 2 \cdot \delta_1 \quad [\text{mm}] \quad (18)$$

și diametrele straturilor de izolație termică cu formulele (19) și (20) ca în figura 2.

$$d_{iz1} = d_e + 2 \cdot \delta_2 \quad [\text{mm}] \quad (19)$$

$$d_{iz2} = d_{iz1} + 2 \cdot \delta_3 \quad [\text{mm}] \quad (20)$$

Marime	Simbol	Valoare	UM
Diametru interior conducta	d_i	340.0	mm
Diametru strat izolatie 1	d_{iz1}	416.0	mm
Diametru strat izolatie 2	d_{iz2}	516.0	mm

Figura 2. Diametrul interior al conductei și diametrele straturilor de izolație termică

Transferul de căldură prin conducție termică prin pereții cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel

Se inițializează cu o valoare arbitrară temperatura t_{x1} pe suprafața de contact între conductă și primul strat de izolație termică și se introduce relația de calcul a fluxului termic unitar \dot{q}_1 transmis prin conducție prin pereții conductei (figura 3).

$$\dot{q}_1 = \frac{(t_{si} + \frac{1}{\beta_1})^2 - (t_{x1} + \frac{1}{\beta_1})^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{01} \cdot \frac{\beta_1}{2})} \cdot \ln(\frac{d_e}{d_i})} \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (21)$$

Se inițializează cu o valoare arbitrară temperatura t_{x2} pe suprafața de contact între cele două straturi de izolație termică și se introduce relația de calcul a fluxului termic unitar \dot{q}_3 transmis prin conducție prin doilea strat de izolație termică (figura 3).

$$\dot{q}_3 = \frac{(t_{x2} + \frac{1}{\beta_3})^2 - (t_{se} + \frac{1}{\beta_3})^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{03} \cdot \frac{\beta_3}{2})} \cdot \ln(\frac{d_{iz2}}{d_{iz1}})} \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (22)$$

Având precizate cele două valori arbitrare pentru temperaturile t_{x1} și t_{x2} pe suprafețele de contact între straturile PCMS se introduce relația de calcul a fluxului termic unitar \dot{q}_2 transmis prin conducție termică prin primul strat de izolație termică (figura 3).

$$\dot{q}_2 = \frac{(t_{x1} + \frac{1}{\beta_2})^2 - (t_{x2} + \frac{1}{\beta_2})^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{02} \cdot \frac{\beta_2}{2})} \cdot \ln(\frac{d_{iz1}}{d_e})} \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (23)$$

Marime	Simbol	Valoare initiala	Valoare finala	UM
Temperatura suprafata contact 1	tx1	290.0	290.000	C
Flux termic unitar prin strat conducta	q1	68317.602	68317.602	W/m
Temperatura suprafata contact 2	tx2	100.0	100.000	C
Flux termic unitar prin strat izolatie 2	q3	355.545	355.545	W/m
Flux termic unitar prin strat izolatie 1	q2	3009.576	3009.576	W/m

Figura 3. Valorile temperaturilor inițiale pe suprafețele de contact între straturi și fluxurile termice unitare transmise prin conducție termică

Datorită faptului că cele două temperaturi pe suprafețele de contact între straturile PCMS au fost alese arbitrar servind ca suport pentru construcția

implementării pe calculator a rezolvării problemei valorile fluxurilor termice unitare \dot{q}_1 , \dot{q}_2 și \dot{q}_3 transmise prin conducție prin straturile peretelui cilindric rezultă diferite (figura 3).

Se calculează valoarea diferențelor Err_{12} și Err_{23} între acestea folosind relațiile

$$Err_{12} = \Delta\dot{q}_{12} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (24)$$

$$Err_{23} = \Delta\dot{q}_{23} = \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (25)$$

și o diferență generală Err care exprimă diferența precedentelor

$$Err = Err_{12} - Err_{23} \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (26)$$

ca în figura 4.

Eroare q1-q2	Err12	65308.03	65308.026	W/m
Eroare q2-q3	Err23	2654.03	2654.031	W/m
Eroare	Err	62653.99	62653.995	W/m

Figura 4. Determinarea diferențelor inițiale între valorile fluxurilor termice unitare și a diferenței generale Err

Pentru a face un calcul de verificare a valorii fluxului termic unitar \dot{q} transmis între suprafața interioară și exterioară prin PCMS având straturi cu conductivitatea termică variabilă cu temperatura se introduce suplimentar în foaia de calcul formula (27) bazată pe relațiile (11), (12) și (13) cu rezultatul prezentat în figura 5.

$\dot{q} =$

$$\frac{t_{si} - t_{se}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{01} \cdot \left(1 + \beta_1 \cdot \frac{(t_{si} + t_{x1})}{2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{02} \cdot \left(1 + \beta_2 \cdot \frac{(t_{x1} + t_{x2})}{2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{d_{iz1}}{d_e}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{03} \cdot \left(1 + \beta_3 \cdot \frac{(t_{x2} + t_{se})}{2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{d_{iz2}}{d_{iz1}}\right)} \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (27)$$

Verificare				
Flux termic unitar transmis	q	1226.047	1226.047	W/m

Figura 5. Verificarea valorii fluxului termic unitar \dot{q} transmis

Transferul de căldură prin conducție termică prin perețele cilindric neomogen cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel

Pentru a respecta legea conservării energiei (LCE) pusă în evidență de către condițiile la limită de specia a 4-a (contact) trebuie obținută egalitatea fluxurilor termice unitare

$$\dot{q} \equiv \dot{q}_1 \equiv \dot{q}_2 \equiv \dot{q}_3 \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \right] \quad (28)$$

prin rezolvarea de exemplu a unui sistem de două ecuații neliniare de tipul

$$\begin{cases} \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = 0 \\ \dot{q}_2 - \dot{q}_3 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

care ținând cont de relațiile (21), (22) și (23) se dezvoltă în forma următoare

$$\begin{cases} \frac{\left(t_{si} + \frac{1}{\beta_1}\right)^2 - \left(t_{x1} + \frac{1}{\beta_1}\right)^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{01} \cdot \frac{\beta_1}{2})} \cdot \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} - \frac{\left(t_{x1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^2 - \left(t_{x2} + \frac{1}{\beta_2}\right)^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{02} \cdot \frac{\beta_2}{2})} \cdot \ln\left(\frac{d_{iz1}}{d_e}\right)} = 0 \\ \frac{\left(t_{x1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^2 - \left(t_{x2} + \frac{1}{\beta_2}\right)^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{02} \cdot \frac{\beta_2}{2})} \cdot \ln\left(\frac{d_{iz1}}{d_e}\right)} - \frac{\left(t_{x2} + \frac{1}{\beta_3}\right)^2 - \left(t_{se} + \frac{1}{\beta_3}\right)^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (\lambda_{03} \cdot \frac{\beta_3}{2})} \cdot \ln\left(\frac{d_{iz2}}{d_{iz1}}\right)} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Determinarea temperaturilor necunoscute t_{x1} și t_{x2} pe suprafețele delimitatoare ale straturilor cu conductivitate termică variabilă cu temperatura și apoi a valorilor fluxurilor termice unitare transmise prin acestea se face rezolvând numeric cu ajutorul Solver-ului sistemul de ecuații neliniare (30) prin parcurgerea următoarelor etape:

- a) Se apelează instrumentul Solver din tab-ul Data al aplicației software Microsoft Excel®. Solver-ul este un add-in care trebuie instalat înainte de prima utilizare. Aceasta se face prin apelarea ferestrei de dialog indicată în figura 6 pornind din meniul *File -> Options -> Add-ins -> Excel Add-ins -> Go ...* și marcarea casetei de validare (checkbox) corespunzătoare;

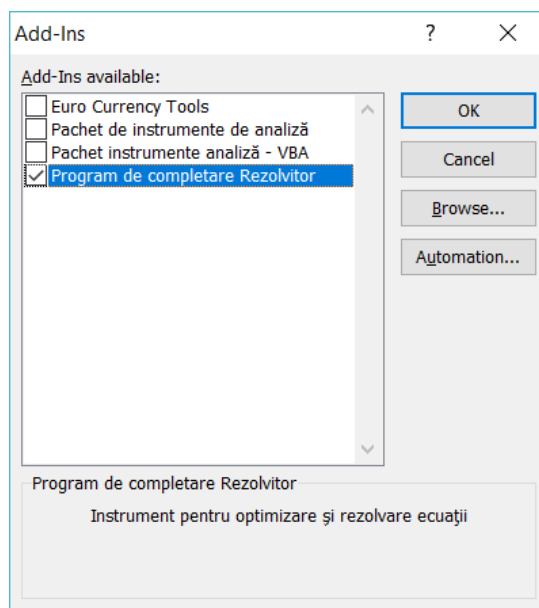


Figura 6. Instalarea Solver-ului ca add-in înainte de prima utilizare

- b) Se introduce referința la celula-țintă sau obiectiv având numele de domeniu Eroare (figura 7) care reprezintă variabila Err calculată cu relația (26) și prezentată anterior în figura 4. Pentru a respecta legea conservării energiei (28) și a obține egalitatea fluxurilor termice unitare transmise prin straturile PCMS diferențele Err_{12} și Err_{23} între valorile acestora calculate cu relațiile (24) și (25) trebuie să fie nule, iar eroarea generală Err trebuie să aibă teoretic valoarea 0 (zero) $Err=0$. Aceasta valoare care se dorește a fi obținută se introduce în caseta de text "Value Of" aflată în linia următoare;
- c) Prin selecție se precizează celulele care conțin valorile variabile ale temperaturilor necunoscute t_{x1} și t_{x2} pe suprafețele de contact între straturile PCMS (figura 3) având numele de domeniu $_tx1$ și $_tx2$ în figura 7;

Transferul de căldură prin conducție termică prin peretele cilindric neomogen cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel

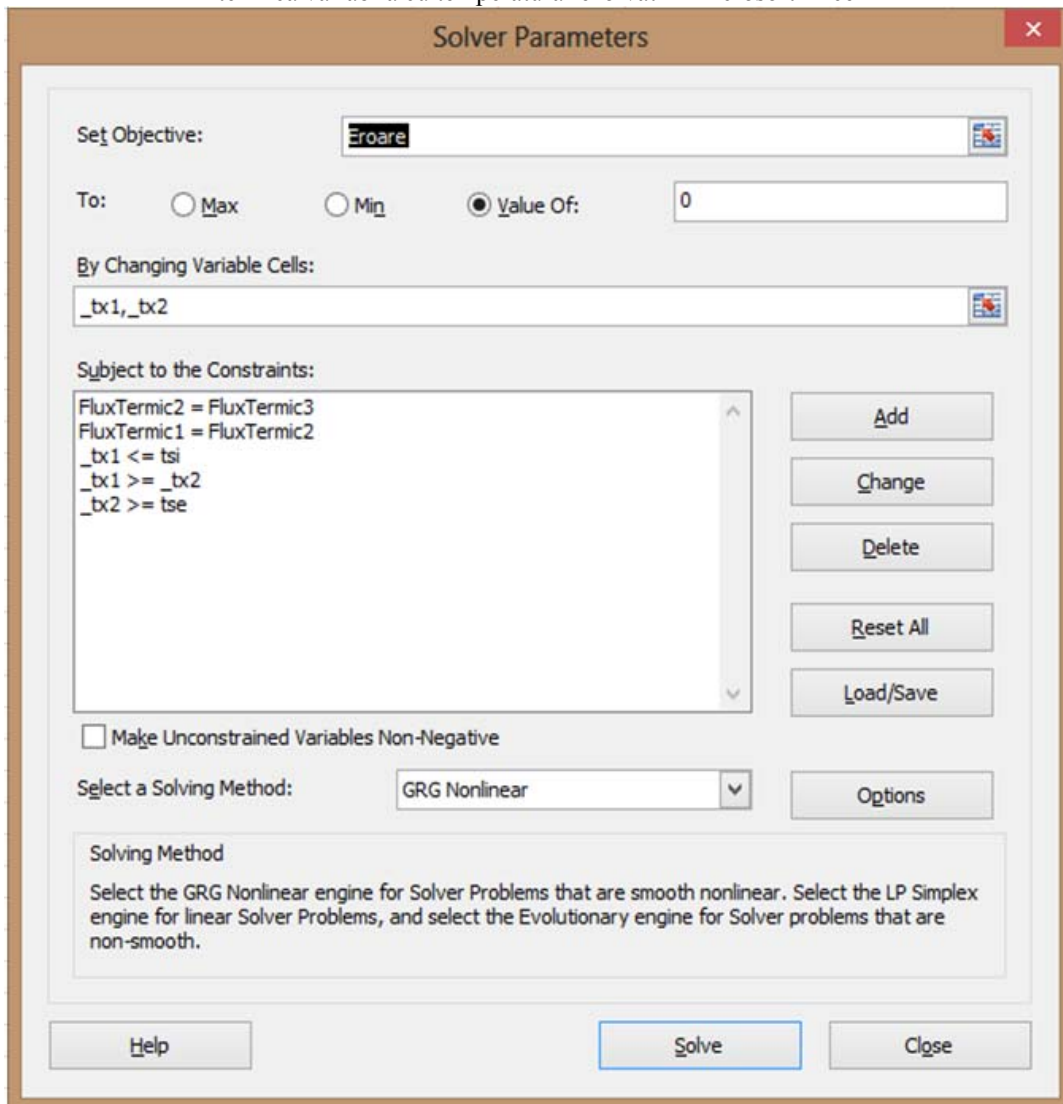


Figura 7. Parametrii de rezolvare utilizați în Solver

- d) În caseta-listă următoare se specifică restricțiile / constrângerile care definesc rezolvarea numerică a problemei folosind butoanele pentru adăugare, modificare sau ștergere ("Add" / "Change" / "Delete") ale ferestrei de dialog: egalitatea fluxurilor termice unitare \dot{q}_1 , \dot{q}_2 și \dot{q}_3 transmise prin straturile PCMS, necesitatea ca temperaturile pe suprafețele delimitatoare ale straturilor să aibă valori descrescătoare pornind de la t_{si} e.g., $t_{si} > t_{x1}$ etc.);
- e) Se alege o metodă de rezolvare corespunzătoare pentru soluționarea problemei numerice neliniare, de exemplu algoritmul GRG Nonlinear din

figura 7 și opțional se precizează suplimentar diverse opțiuni avansate de rezolvare folosind butonul ”Options”;

f) Se apasă butonul ”Solve”.

În urma rezolvării numerice a sistemului de ecuații neliniare (30) se obțin temperaturile necunoscute t_{x1} și t_{x2} pe suprafețele delimitatoare ale straturilor PCMS și sunt calculate valorile fluxurilor termice unitare \dot{q}_1 , \dot{q}_2 și \dot{q}_3 transmise prin acestea (figura 8).

Marime	Simbol	Valoare initiala	Valoare finala	UM
Temperatura suprafata contact 1	t_{x1}	290.0	299.813	C
Flux termic unitar prin strat conducta	q_1	68317.602	1278.861	W/m
Temperatura suprafata contact 2	t_{x2}	100.0	221.934	C
Flux termic unitar prin strat izolatie 2	q_3	355.545	1278.861	W/m
Flux termic unitar prin strat izolatie 1	q_2	3009.576	1278.861	W/m
Eroare q_1 - q_2	Err12	65308.03	0.000	W/m
Eroare q_2 - q_3	Err23	2654.03	0.000	W/m
Eroare	Err	62653.99	0.000	W/m

Figura 8. Rezultate numerice temperaturi t_{x1} , t_{x2} și fluxuri termice unitare

Privind rezultatele numerice prezentate în figura 8 și afișate în coloana **Valoare finală** se remarcă respectarea tuturor condițiilor impuse privind legea conservării energiei (28) prin obținerea egalității fluxurilor termice unitare transmise prin straturile PCMS și anularea diferențelor inițiale Err_{12} , Err_{23} și Err între valorile acestora.

Verificarea suplimentară generală folosind relația (27) confirmă validitatea rezultatului obținut privind valoarea corectă a fluxului termic unitar \dot{q} transmis între suprafața interioară și exterioară prin PCMS studiat (figura 9).

Verificare				
Flux termic unitar transmis	q	1226.047	1278.861	W/m

Figura 9. Fluxul termic unitar \dot{q} transmis între suprafața interioară și exterioară a PCMS

Având în vedere obiectivele acestei lucrări și datele problemei rezolvate se observă de asemenea că rezultatele numerice obținute folosind Solver-ul din aplicația

Transferul de căldură prin conducție termică prin pereții cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel
 Microsoft Excel® sunt identice cu cele prezentate în [8] și determinate prin a doua metodă de rezolvare (figura 10 și figura 11) confirmând în acest mod soluționarea corespunzătoare a problemei propuse folosind o implementare diferită pe calculator și un alt instrument de rezolvare a unui sistem de ecuații neliniare.

Se presupun următoarele valori initiale

Temperatura pe suprafața de contact oțel-strat izolație 1 $t_{x1} := 295 \cdot ^\circ\text{C}$

Temperatura pe suprafața de contact strat izolație 1-strat izolație 2 $t_{x2} := 150 \cdot ^\circ\text{C}$

Given

$$fn_q(t_{si}, t_{x1}, \lambda_{01}, \beta_1, d_i, d_e) - fn_q(t_{x1}, t_{x2}, \lambda_{02}, \beta_2, d_e, d_{iz1}) = 0$$

$$fn_q(t_{x1}, t_{x2}, \lambda_{02}, \beta_2, d_e, d_{iz1}) - fn_q(t_{x2}, t_{se}, \lambda_{03}, \beta_3, d_{iz1}, d_{iz2}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} t_{x1} \\ t_{x2} \end{pmatrix} := \text{Find}(t_{x1}, t_{x2}) \quad \begin{pmatrix} t_{x1} \\ t_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299.813 \\ 221.934 \end{pmatrix} ^\circ\text{C}$$

Figura 10. Valori temperaturi t_{x1} și t_{x2} pe suprafețele de contact între straturi [8]

Valorile fluxului termic prin straturile peretelui cilindric

Fluxul termic prin

stratul conductei $q_1 := fn_q(t_{si}, t_{x1}, \lambda_{01}, \beta_1, d_i, d_e)$ $q_1 = 1278.861 \frac{\text{W}}{\text{m}}$

Fluxul termic prin

stratul izolație 1 $q_2 := fn_q(t_{x1}, t_{x2}, \lambda_{02}, \beta_2, d_e, d_{iz1})$ $q_2 = 1278.861 \frac{\text{W}}{\text{m}}$

Fluxul termic prin

stratul izolație 2 $q_3 := fn_q(t_{x2}, t_{se}, \lambda_{03}, \beta_3, d_{iz1}, d_{iz2})$ $q_3 = 1278.861 \frac{\text{W}}{\text{m}}$

Figura 11. Valori fluxuri termice unitare transmise prin straturile PCMS [8]

Instrumentul software creat pentru studiul transferului termic unidirecțional prin pereți cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura poate fi utilizat și în diverse situații de analiză sau optimizare a structurii acestora.

Se poate urmări relativ ușor modul în care se modifică valorile fluxului termic unitar transmis prin perete și temperaturile pe suprafețele de contact folosind diverse

tipuri de materiale a căror variație cu temperatura a conductivității termice este cunoscută din literatura de specialitate [3], [4], [6], [10] ș.a.

Datele problemei privind caracteristicile geometrice ale conductei și straturilor de izolație, temperaturile pe suprafețele delimitatoare ale structurii, coeficienții de variație a conductivității termice cu temperatura etc. fiind implementate ca variabile în foaia de calcul pentru studiu și analiză se modifica valorile acestora prezentate în figura 1, iar apoi se apelează instrumentul Solver folosind parametrii de rezolvare din figura 7.

Se prezintă în continuare datele inițiale și rezultatele numerice obținute cu ajutorul instrumentului software folosit pentru studiul următoarelor două cazuri.

Cazul nr. 1

A fost analizat transferul termic prin aceeași conductă izolată cu aceleași materiale având grosimile din tabelul 1, însă dispunerea straturilor se inversează. Caracteristicile straturilor sunt indicate în tabelul 2, iar datele inițiale, rezolvarea și rezultatele numerice obținute sunt prezentate în figura 12.

TABELUL 2

Cazul nr. 1: Caracteristici straturi PCMS

Nr. strat	Material	Grosime [mm]	Conductivitate termică [W/m·K]
1	Oțel	$\phi 356 \times 8$	$\lambda_1 = 50$
2	Izolație termică nr. 1	50	$\lambda_2 = 0.23 \cdot (1 + 8 \cdot 10^{-4} \times t)$
3	Izolație termică nr. 2	30	$\lambda_3 = 0.35 \cdot (1 + 6.25 \cdot 10^{-4} \times t)$

Transferul de căldură prin conducție termică prin peretele cilindric neomogen cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel

Datele problemei				
Marime	Simbol	Valoare	UM	
Constanta Lambda01	λ_{01}	50.0	W/mK	
Constanta Beta1	β_1	0.00E+00	1/K	
Constanta Lambda02	λ_{02}	0.23	W/mK	
Constanta Beta2	β_2	8.00E-04	1/K	
Constanta Lambda03	λ_{03}	0.35	W/mK	
Constanta Beta3	β_3	6.25E-04	1/K	
Diametru exterior conducta	d_e	356.0	mm	
Grosime perete conducta	δ_1	8.0	mm	
Grosime strat izolatie 1	δ_2	50.0	mm	
Grosime strat izolatie 2	δ_3	30.0	mm	
Temperatura suprafata interioara	t_{si}	300.0	C	
Temperatura suprafata exterioara	t_{se}	50.0	C	

Rezolvare				
Marime	Simbol	Valoare	UM	
Diametru interior conducta	d_i	340.0	mm	
Diametru strat izolatie 1	d_{iz1}	456.0	mm	
Diametru strat izolatie 2	d_{iz2}	516.0	mm	

Marime	Simbol	Valoare initiala	Valoare finala	UM
Temperatura suprafata contact 1	t_{x1}	290.0	299.817	C
Flux termic unitar prin strat conducta	q_1	68317.602	1247.380	W/m
Temperatura suprafata contact 2	t_{x2}	100.0	116.646	C
Flux termic unitar prin strat izolatie 2	q_3	931.205	1247.380	W/m
Flux termic unitar prin strat izolatie 1	q_2	1282.139	1247.380	W/m
Eroare q_1-q_2	Err12	67035.46	0.000	W/m
Eroare q_2-q_3	Err23	350.93	0.000	W/m
Eroare	Err	66684.53	0.000	W/m

Verificare				
Flux termic unitar transmis	q	1237.439	1247.380	W/m

Figura 12. Datele inițiale, rezolvarea și rezultatele numerice pentru cazul nr. 1

Cazul nr. 2

A fost analizat transferul termic printr-o conductă de oțel $\phi 159 \times 6$ mm având temperaturile pe suprafețele delimitatoare ale structurii $t_{si}=150^\circ\text{C}$ și $t_{se}=45^\circ\text{C}$ izolată cu aceleași materiale din tabelul 1. Caracteristicile straturilor sunt indicate în tabelul 3, iar datele inițiale, rezolvarea și rezultatele numerice obținute sunt prezentate în figura 13.

Cazul nr. 2: Caracteristici straturi PCMS

Nr. strat	Material	Grosime [mm]	Conductivitate termică [W/m·K]
1	Oțel	$\phi 159 \times 6$	$\lambda_1 = 50$
2	Izolație termică nr. 1	50	$\lambda_2 = 0.35 \cdot (1 + 6.25 \cdot 10^{-4} \times t)$
3	Izolație termică nr. 2	50	$\lambda_3 = 0.23 \cdot (1 + 8 \cdot 10^{-4} \times t)$

Datele problemei				
Marime	Simbol	Valoare	UM	
Constanta Lambda01	$\lambda 01$	50.0	W/mK	
Constanta Beta1	$\beta 1$	0.00E+00	1/K	
Constanta Lambda02	$\lambda 02$	0.35	W/mK	
Constanta Beta2	$\beta 2$	6.25E-04	1/K	
Constanta Lambda03	$\lambda 03$	0.23	W/mK	
Constanta Beta3	$\beta 3$	8.00E-04	1/K	
Diametru exterior conducta	de	159.0	mm	
Grosime perete conducta	$\delta 1$	6.0	mm	
Grosime strat izolatie 1	$\delta 2$	50.0	mm	
Grosime strat izolatie 2	$\delta 3$	50.0	mm	
Temperatura suprafata interioara	tsi	150.0	C	
Temperatura suprafata exterioara	tse	45.0	C	

Rezolvare				
Marime	Simbol	Valoare	UM	
Diametru interior conducta	di	147.0	mm	
Diametru strat izolatie 1	diz1	259.0	mm	
Diametru strat izolatie 2	diz2	359.0	mm	
Marime	Simbol	Valoare initiala	Valoare finala	UM
Temperatura suprafata contact 1	tx1	145.0	149.938	C
Flux termic unitar prin strat conducta	q1	20017.382	250.114	W/m
Temperatura suprafata contact 2	tx2	80.0	98.441	C
Flux termic unitar prin strat izolatie 2	q3	162.663	250.114	W/m
Flux termic unitar prin strat izolatie 1	q2	313.559	250.114	W/m
Eroare q1-q2	Err12	19703.82	0.000	W/m
Eroare q2-q3	Err23	150.90	0.000	W/m
Eroare	Err	19552.93	0.000	W/m
Verificare				
Flux termic unitar transmis	q	248.394	250.114	W/m

Figura 13. Datele inițiale, rezolvarea și rezultatele numerice pentru cazul nr. 2

Transferul de căldură prin conducție termică prin pereții cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel

3. CONCLUZII

Rezolvarea problemei de transfer termic unidirecțional prin pereți cilindrici neomogeni/multistrat (PCMS) cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura poate fi efectuată numeric prin determinarea temperaturilor necunoscute t_{xn} pe suprafețele delimitatoare ale straturilor și calcularea fluxului termic unitar \dot{q}_n transmis prin acestea folosind relația (14) în care funcțiile parabolice de temperatură θ_{si} și θ_{se} se determină cu formulele (15) și (16).

Implementarea rezolvării problemei studiate a fost făcută în aplicația software Microsoft Excel® din suita Microsoft Office® pentru a utiliza instrumentul de rezolvare Solver. Acesta operează cu un grup de celule corelate direct și/sau indirect cu o anumită celulă-țintă sau obiectiv (figura 7) și modifică valorile specificate de către utilizator în anumite celule (figura 3) pentru a obține apoi în celula-țintă rezultatul urmărit.

În funcție de structura PCMS care poate avea în componență un anumit strat cu conductivitatea termică variabilă cu temperatura prin utilizarea unor relații de tipul (21), (22), (23) pentru exprimarea fluxului termic unitar transmis prin acestea se formează un sistem de ecuații neliniare (30).

Rezolvarea sistemului (30) se face numeric prin folosirea Solver-ului după precizarea referinței la celula-țintă sau obiectiv, a celulelor care conțin valorile variabile ale temperaturilor necunoscute pe suprafețele delimitatoare ale straturilor, a restricțiilor care definesc rezolvarea problemei și alegerea unui algoritm de rezolvare corespunzător (figura 7).

Rezultatele numerice se obțin rapid fiind determinate temperaturile necunoscute t_{xn} pe suprafețele delimitatoare ale straturilor PCMS și calculate fluxurile termice unitare transmise prin acestea (figura 8). Eroarea de determinare numerică a metodei prezentate în lucrare este foarte redusă având valori de ordinul 10^{-5} - 10^{-6} , iar rezultatele obținute sunt perfect acceptabile d.p.d.v. tehnic.

Pentru a verifica suplimentar valoarea fluxului termic unitar transmis între suprafața interioară și exterioară a PCMS poate fi utilizată relația (27) în care

exprimarea rezistențelor termice unitare la transferul de căldură se face prin folosirea metodei clasice de calcul a conductivităților termice medii ale straturilor (12).

Comparând rezultatele numerice obținute prin această implementare pe calculator cu cele prezentate în [8] și determinate printr-o metodă de rezolvare diferită folosind Mathcad (figura 10 și figura 11) se constată că acestea sunt identice confirmând soluționarea corespunzătoare a problemei propuse prin utilizarea Solver-ului ca instrument de rezolvare a unui sistem de ecuații neliniare.

Având în vedere modul de implementare a datelor principale ale problemei ca variabile separate în foaia de calcul (figura 1), instrumentul software creat poate fi utilizat în diverse situații de analiză sau optimizare a structurii unui PCMS cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura. Au fost prezentate în lucrare două cazuri diferite studiate având datele inițiale și rezultatele numerice obținute evidențiate în figura 12 și figura 13.

Programul de analiză și calcul automat creat pentru studiul și analiza transmiterii căldurii în regim termic staționar prin pereți neomogeni/multistrat de formă cilindrică formați din diverse straturi de materiale care au conductivitatea termică variabilă cu temperatura este un instrument util studenților de la Facultățile de Instalații care studiază fenomenele de transfer termic și specialiștilor interesați de rezolvarea practică a acestor tipuri de aplicații din domeniul ingineresc.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Chisăliță, G.A., Transmiterea căldurii, Note de curs, 2010-2019.
- [2] Chisăliță, G.A., Utilizarea tabelor de o singură variabilă pentru determinarea numerică și reprezentarea variației temperaturii într-un perete cilindric omogen, Conferința “Știința Modernă și Energia”, Editura RISOPRINT, Cluj-Napoca, ISSN 2066-4125, 2017, pp. 169-179.
- [3] Leonăchescu, N., Termotehnică, E.D.P, București, 1981, pp. 251-258, 342-361.
- [4] Oprețoiu, A., Termotehnică și aparate termice – Transmiterea căldurii, Litografia I.P.C.-N., Cluj-Napoca, 1992, pp. 11-16, 37-40.
- [5] Bergman, T.L., Lavine, A.S., Incropera, F.P., Dewitt D.P., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7th edition, ISBN 978-0470-50197-9, John Wiley & Sons, Inc., 2011, pp. 83-87, 230-261.

- Transferul de căldură prin conducție termică prin pereții cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura rezolvat în Microsoft Excel
- [6] Cengel, Y.A., Ghajar A.J., Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications, 5th edition, ISBN 978-0073398181, McGraw-Hill Education, 2014, pp. 62-86, 269-311.
- [7] Lienhard IV, J.H., Lienhard V, J.H., A Heat Transfer Textbook, 4th edition, ISBN 0-486-47931-5, Dover Publications Inc., 2011, pp. 49-77, 234-247.
- [8] Chisăliță, G.A., Transferul termic prin conducție în regim staționar prin pereți cilindrici neomogeni cu straturi având conductivitatea termică variabilă cu temperatura, Conferința “Știința Modernă și Energia”, Cluj-Napoca, ISBN 973-656-224-7, 2002, pp. 355-368.
- [9] Popa B., Vintilă C., Transfer de căldură în procese industriale, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1975, pp. 88-93.
- [10] Leonăchescu, N. ș.a., Probleme de termotehnică, E.D.P, București, 1977, pp. 225-237.
- [11] Muntea, C., Câmpeanu, A., Transfer de căldură – Probleme, ISBN 973-95386-2-2, Editura Ana, Cluj-Napoca, 1997, pp. 38-40.