

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

Numerical determination of the temperature two-dimensional field in a plane region in stationary thermal solution resolved in Excel Microsoft

Șef lucr. Dr. ing. Gelu-Adrian CHISĂLIȚĂ

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Facultatea de Instalații, Romania

E-mail: gelu.chisalita@insta.utcluj.ro

Abstract

The paper presents the construction and use of a new software tool for numerical analysis of the two-dimensional temperature distribution in a flat region of rectangular shape of a body with constant thermal conductivity and no generation, when the temperatures on the bounding surfaces of the body are known. The finite difference method (FDM) is used to solve the system of linear equations by properly calling the Solver tool from the Microsoft Excel® software application.

Keywords: transfer, heat, field, temperature, stationary, two-dimensional, differences, finite, system, equations, linear, solver, excel

Rezumat

Lucrarea prezintă o modalitate de construcție și utilizare a unui instrument software pentru determinarea numerică a distribuției temperaturii într-o regiune plană de formă rectangulară, considerând transmiterea căldurii în regim termic staționar printr-un corp fără surse interioare de căldură și cunoscând temperaturile pe suprafețele delimitatoare ale acestuia. Ca metoda de lucru principală este folosită metoda calculului cu diferențe finite (MDF) rezolvarea sistemului de ecuații liniare fiind efectuată cu ajutorul instrumentului Solver din aplicația software Microsoft Excel® aparținând suitei Microsoft Office®.

Cuvinte cheie: transfer, căldură, câmp, temperatură, staționar, bidimensional, diferențe, finite, sistem, ecuații, liniare, Solver, Excel

1. INTRODUCERE

În cazurile corpurilor în care se transmitea căldurii se face prin conducție termică ecuația fundamentală a conducției termice (EFCT sau ecuația lui FOURIER) are forma generală (1) descrisă în [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] ș.a.:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left(\nabla^2 t + \frac{\dot{q}_{SIC}}{\lambda} \right) \text{ sau } \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_{SIC}}{\lambda} \quad (1)$$

Pentru regimul de transfer termic staționar $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ și considerând situația în care nu există prezente surse interioare de căldură $\dot{q}_{SIC} = 0$, iar dacă se neglijează variația temperaturii în direcția axei de coordonate Oz $\frac{\partial t}{\partial z} = 0$ EFCT se reduce la forma (2) [1], [2], [3] ș.a.

$$\nabla^2 t = 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

S-a indicat în lucrarea [2] modul în care această ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea poate fi integrată numeric (aproximativ) utilizând metoda diferențelor finite (MDF) [3], [4], [5], [6] ș.a. prin înlocuirea ecuației (2) cu o relație bazată pe diferențe finite în forma (3)

$$\frac{\Delta_x(\Delta t_x)}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_y(\Delta t_y)}{\Delta y^2} = 0 \quad (3)$$

exprimarea diferențelor finite de ordinul întâi Δt_x și Δt_y (4) și al doilea (5)

$$\Delta t_x = t_{x+\Delta x,y} - t_{x,y}; \quad \Delta t_y = t_{x,y+\Delta y} - t_{x,y} \quad (4)$$

$$\Delta_x(\Delta t_x) = (t_{x+\Delta x,y} - t_{x,y}) - (t_{x,y} - t_{x-\Delta x,y}) \quad (5)$$

$$\Delta_y(\Delta t_y) = (t_{x,y+\Delta y} - t_{x,y}) - (t_{x,y} - t_{x,y-\Delta y})$$

și obținerea unei relații generale (6) de determinare a temperaturii $t_{x,y}$ într-un nod de coordonate (x,y) al unei rețele rectangulare de dispunere a nodurilor de calcul [1], [5], [6], [7] ca în figura 1.

$$t_{x,y} = \frac{\frac{t_{x+\Delta x,y} + t_{x-\Delta x,y}}{\Delta x^2} + \frac{t_{x,y+\Delta y} + t_{x,y-\Delta y}}{\Delta y^2}}{2 \cdot \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} \quad (6)$$

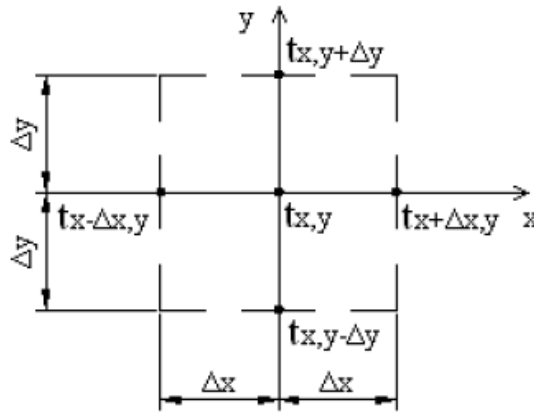


Figura 1. Temperatura $t_{x,y}$ în nodul de coordonate (x,y) [2]

Pentru cazul obișnuit în care se preferă utilizarea unei rețele pătrate de analiză a câmpului bidimensional de temperatură folosind un pas egal $\Delta x = \Delta y = \Delta$ pe cele două axe de coordonate Ox și Oy relația (6) se simplifică și devine [1], [2], [3], [4], [5], [7] ș.a.:

$$t_{x,y} = \frac{t_{x+\Delta,y} + t_{x-\Delta,y} + t_{x,y+\Delta} + t_{x,y-\Delta}}{4} \quad (7)$$

În lucrarea de față este prezentat un exemplu de calcul numeric al distribuției temperaturii în interiorul unei regiuni cu secțiune rectangulară cunoscând

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

temperaturile pe suprafețele delimitatoare ale acesteia (condiții la limită de tip DIRICHLET) și folosind pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare format instrumentul Solver din Microsoft Excel®.

Acest instrument de lucru operează cu un grup de celule corelate direct și/sau indirect cu o celulă-țintă denumită obiectiv care conține o valoare precizată sau care poate fi minimizată/maximizată. Instrumentul modifică valorile inițiale din anumite celulele indicate de către utilizator pentru a obține apoi în celula-țintă rezultatul dorit, cu o eroare minimă de calcul, ținând cont de constrângerile (restricțiile) care definesc domeniul de soluții acceptabile și algoritmul de rezolvare selectat pentru soluționarea problemei.

Metoda de rezolvare prezentată nu solicită din partea utilizatorului depunerea unui efort deosebit de implementare pe calculator, rezultatele numerice și/sau grafice sunt obținute rapid și este deosebit de utilă mai ales în studiul și analiza unor situații în care datele problemei suferă modificări față de valorile inițiale luate în calcul.

2. IMPLEMENTAREA ȘI REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSFER TERMIC

Pentru compararea și verificarea rezultatelor obținute se propune implementarea pe calculator și rezolvarea aceleiași probleme de transmitere bidimensională a căldurii prin conducție termică în regim staționar formulată în [2] și enunțată astfel:

Un stâlp cu secțiunea rectangulară 50×30 cm este supus pe suprafețele laterale influențelor unor medii având temperaturile: $t_{s1}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=80^{\circ}\text{C}$, $t_{s3}=20^{\circ}\text{C}$ și $t_{s4}=70^{\circ}\text{C}$. Să se determine prin metoda calculului cu diferențe finite (MDF) temperaturile în nodurile unei rețele pătrate având pasul egal pe axele de coordonate $\Delta x=\Delta y=10$ cm (figura 2).

Construcția foii de calcul automat utilizate în scopul soluționării problemei propuse implică parcurgerea următoarelor etape principale.

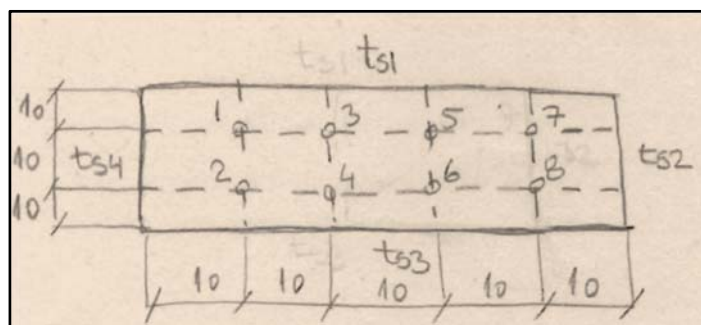


Figura 2. Rețea pătrată de dispunere a nodurilor de calcul a temperaturii cu pasul $\Delta x=\Delta y=10$ cm [2]

Se definesc și se implementează datele inițiale ale problemei (figura 3) constituite de temperaturile t_{s1} , t_{s2} , t_{s3} și t_{s4} pe suprafețele delimitatoare ale secțiunii

rectangulare. Cu toate că există alternativa folosirii acestora cu valori constante direct introduse în formulele de calcul este preferabilă implementarea temperaturilor ca variabile separate. În cazul efectuării unui studiu extins al câmpului de temperatură bidimensional generat de diverse combinații de valori ale temperaturilor pe suprafețele delimitatoare acestea sunt ușor de accesat și modificat.

Marime	ID	U.M.	Valoare
Temp. suprafata 1	ts1	120	C
Temp. suprafata 2	ts2	80	C
Temp. suprafata 3	ts3	20	C
Temp. suprafata 4	ts4	70	C

Figura 3. Implementarea datelor inițiale ale problemei

Utilizarea rezultatelor MDF prin folosirea relației (7) pentru exprimarea temperaturilor în nodurile rețelei de calcul adoptate generează setul de formule (8) prezentat în [2]

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{t_{s1}+t_3+t_2++t_{s4}}{4} \\ t_2 = \frac{t_1+t_4+t_{s3}+t_{s4}}{4} \\ t_3 = \frac{t_{s1}+t_5+t_4+t_1}{4} \\ t_4 = \frac{t_3+t_6+t_{s3}+t_2}{4} \\ t_5 = \frac{t_{s1}+t_7+t_6+t_3}{4} \\ t_6 = \frac{t_5+t_8+t_{s3}+t_4}{4} \\ t_7 = \frac{t_{s1}+t_{s2}+t_8+t_5}{4} \\ t_8 = \frac{t_7+t_{s2}+t_{s3}+t_6}{4} \end{array} \right. \quad (8)$$

care pe urmă este transformat într-un sistem de opt ecuații liniare (SEL) cu opt necunoscute (9) care reprezintă temperaturile căutate $t_1 \dots t_8$ [2].

$$\begin{array}{l} 4 \cdot t_1 - t_2 - t_3 + 0 \cdot t_4 + 0 \cdot t_5 + 0 \cdot t_6 + 0 \cdot t_7 + 0 \cdot t_8 = t_{s1} + t_{s4} \\ -t_1 + 4 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 - t_4 + 0 \cdot t_5 + 0 \cdot t_6 + 0 \cdot t_7 + 0 \cdot t_8 = t_{s3} + t_{s4} \\ -t_1 + 0 \cdot t_2 + 4 \cdot t_3 - t_4 - t_5 + 0 \cdot t_6 + 0 \cdot t_7 + 0 \cdot t_8 = t_{s1} \\ 0 \cdot t_1 - t_2 - t_3 + 4 \cdot t_4 + 0 \cdot t_5 - t_6 + 0 \cdot t_7 + 0 \cdot t_8 = t_{s3} \\ 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 - t_3 + 0 \cdot t_4 + 4 \cdot t_5 - t_6 - t_7 + 0 \cdot t_8 = t_{s1} \\ 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 - t_4 - t_5 + 4 \cdot t_6 + 0 \cdot t_7 - t_8 = t_{s3} \\ 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 + 0 \cdot t_4 - t_5 + 0 \cdot t_6 + 4 \cdot t_7 - t_8 = t_{s1} + t_{s2} \\ 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 + 0 \cdot t_4 + 0 \cdot t_5 - t_6 - t_7 + 4 \cdot t_8 = t_{s2} + t_{s3} \end{array} \quad (9)$$

Ținând cont de faptul că instrumentul Solver operează cu un grup de celule corelate cu o celulă-țintă denumită obiectiv și modifică în urma rezolvării valorile din celulele indicate de către utilizator se inițializează valorile temperaturilor $t_1 \dots t_8$ ca în figura 4.

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

Implementare in Excel								
	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8
Valori variabile	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Figura 4. Inițializarea temperaturilor necunoscute din nodurile rețelei de calcul

Sistemul de ecuații liniare SEL (9) se transpune în forma matricială obișnuită (10) [2]

$$MC \times VN = VTL \quad (10)$$

în care MC reprezintă matricea coeficienților (11), VN este vectorul necunoscutelor și VTL vectorul termenilor liberi (12) [2].

$$MC = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$VN = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \end{bmatrix} \quad VTL = \begin{bmatrix} t_{s1} + t_{s4} \\ t_{s3} + t_{s4} \\ t_{s1} \\ t_{s3} \\ t_{s1} \\ t_{s3} \\ t_{s1} + t_{s2} \\ t_{s2} + t_{s3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Matricea coeficienților MC este implementată în foaia de calcul ca în figura 5. Folosind valorile inițiale ale temperaturilor din figura 4 și ecuațiile SEL se calculează o coloană de rezultate preliminare care se compară cu valorile corespunzătoare ale VTL din figura 6.

Ecuatia1	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Ecuatia2	-1.0	4.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Ecuatia3	-1.0	0.0	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0
Ecuatia4	0.0	-1.0	-1.0	4.0	0.0	-1.0	0.0	0.0
Ecuatia5	0.0	0.0	-1.0	0.0	4.0	-1.0	-1.0	0.0
Ecuatia6	0.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0	4.0	0.0	-1.0
Ecuatia7	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	4.0	-1.0
Ecuatia8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0	4.0

Figura 5. Introducerea MC (matricea coeficienților)

Rezultat	Op.	Problema
2.0	=	190.0
2.0	=	90.0
1.0	=	120.0
1.0	=	20.0
1.0	=	120.0
1.0	=	20.0
2.0	=	200.0
2.0	=	100.0

Figura 6. Rezultate preliminare și valorile VTL

În urma rezolvării numerice a SEL cu opt necunoscute (9) valorile din coloana **Rezultat** trebuie să fie identice cu cele ale VTL.

Pentru a putea specifica celula-țintă sau obiectivul Solver-ului ca parametru necesar în rezolvarea problemei se introduce în foaia de calcul o linie suplimentară denumită **Condiție** care va conține această celulă.

Se poate utiliza oricare dintre ecuațiile sistemului de ecuații liniare (9) pentru precizarea condiției, iar în figura 7 este exemplificată folosirea primei ecuații pentru acest rol.

Condiție	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	=	190.0
----------	-----	------	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	-------

Figura 7. Precizarea condiției care conține celula-țintă (obiectivul Solver-ului)

Asamblând toate elementele prezentate mai sus în figurile 5, 6 și 7: matricea coeficienților MC, coloana de rezultate preliminare / finale, vectorul termenilor liberi VTL și condiția suplimentară care conține obiectivul Solver-ului implementarea pe calculator a rezolvării problemei propuse este finalizată fiind redată în totalitate în figura 8.

Implementare in Excel										Rezultat	Op.	Problema
	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8				
Valori variabile	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000				
Ecuatia1	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	=	190.0	
Ecuatia2	-1.0	4.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	=	90.0	
Ecuatia3	-1.0	0.0	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	=	120.0	
Ecuatia4	0.0	-1.0	-1.0	4.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	1.0	=	20.0	
Ecuatia5	0.0	0.0	-1.0	0.0	4.0	-1.0	-1.0	0.0	1.0	=	120.0	
Ecuatia6	0.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0	4.0	0.0	-1.0	1.0	=	20.0	
Ecuatia7	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	4.0	-1.0	2.0	=	200.0	
Ecuatia8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0	4.0	2.0	=	100.0	
Condiție	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	=	190.0	

Figura 8. Implementarea pe calculator a rezolvării problemei

Determinarea temperaturilor necunoscute în nodurile rețelei de calcul adoptate (figura 2) se face rezolvând numeric SEL (9) cu ajutorul Solver-ului prin parcurgerea următorilor pași:

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

- a) Se apelează instrumentul Solver din tab-ul Data al aplicației software Microsoft Excel®. Deoarece Solver-ul este un add-in trebuie instalat înainte de prima utilizare. Instalarea se face din meniul *File -> Options -> Add-ins -> Excel Add-ins -> Go ...* apelând fereastra de dialog indicată în figura 9 în care se marchează caseta de validare corespunzătoare;

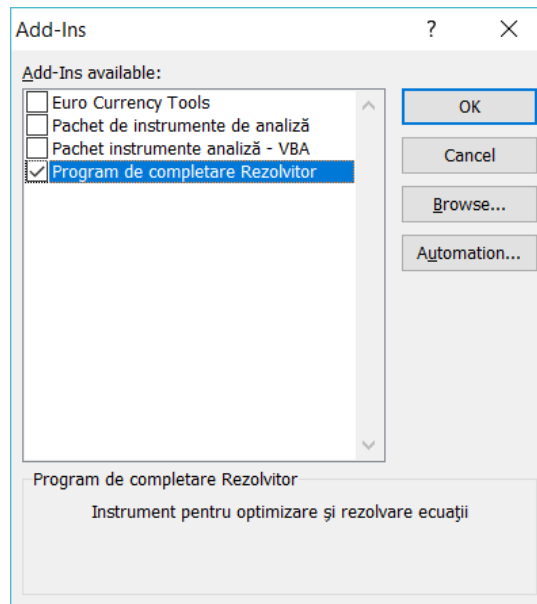


Figura 9. Instalarea Solver-ului ca add-in

- b) Se introduce referința la celula-țintă sau obiectiv (\$K\$41 din figura 10) conținută în linia suplimentară Condiție, iar în caseta de text aflată mai jos se precizează valoarea urmărită a fi obținută.
Deoarece a fost aleasă pentru Condiție prima ecuație a SEL (9) valoarea necesară este corespunzător prima din VTL (figura 6 și figura 8);
- c) Se indică direct sau prin selecție celulele care conțin valorile variabile ale temperaturilor necunoscute inițializate ca în figura 4. Pentru a fi mai ușor de operat cu acestea este recomandat ca ele să alcătuiască un domeniu contiguu e.g., \$C\$32:\$J\$32 în figura 10;

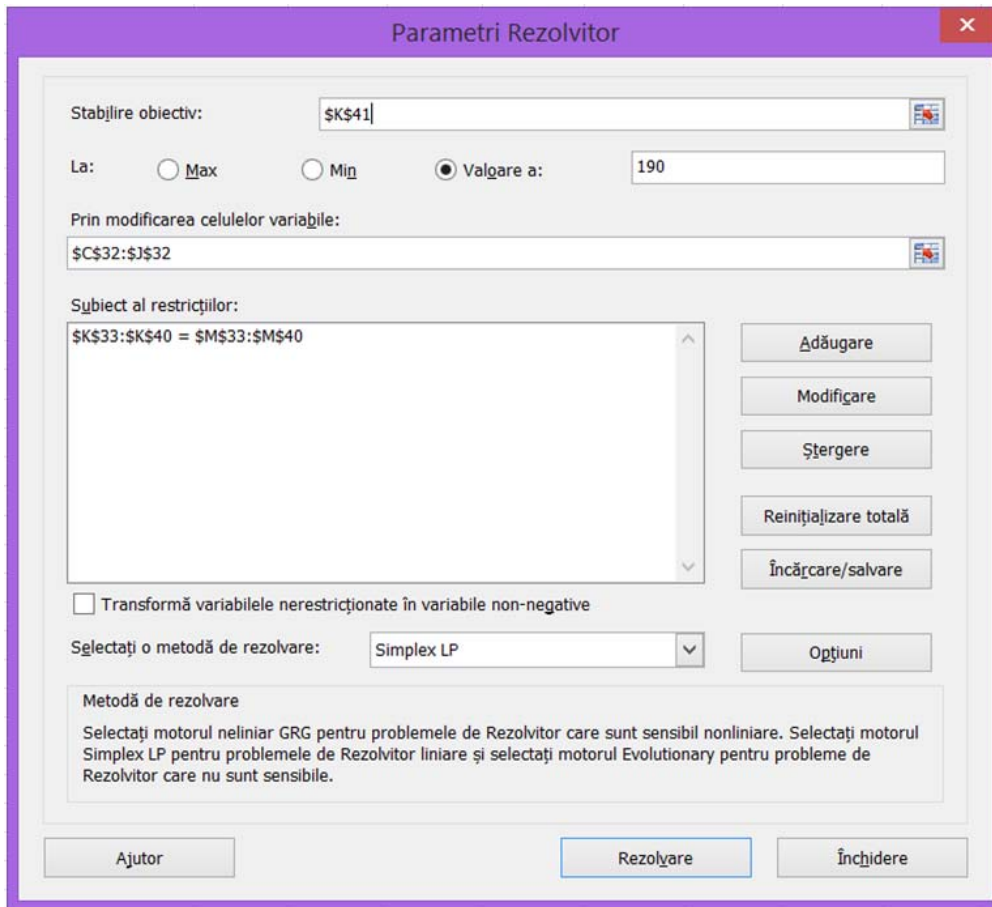


Figura 10. Specificarea parametrilor de rezolvare utilizați în Solver

- d) Se introduc în caseta-listă următoarele restricțiile / constrângerile care definesc rezolvarea problemei utilizând în acest scop butoanele pentru adăugare, modificare sau ștergere ale ferestrei de dialog. Soluționarea numerică a SEL (9) se obține atunci când valorile din coloana **Rezultat** devin identice cu cele din coloana **Problema** care reprezintă valorile VTL (figura 8);
- e) Se selectează o metodă de rezolvare potrivită dintre cele pe care le pune la dispoziția utilizatorului instrumentul Solver (Simplex LP în figura 10) și dacă este necesar se aleg suplimentar alte opțiuni avansate de rezolvare;
- f) Se apasă butonul **Rezolvare**.

În urma rezolvării numerice a SEL (9) se obțin valorile temperaturilor necunoscute $t_1 \dots t_8$ în nodurile rețelei de calcul adoptate (figura 11), dispuse în celulele indicate de către utilizator la punctul c) mai sus.

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

Rezultate	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	Rezultat	Op.	Problema
Valori variabile	83.340	57.024	86.335	54.756	87.244	55.665	86.976	60.660			
Ecuatia1	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	190.0	=	190.0
Ecuatia2	-1.0	4.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	90.0	=	90.0
Ecuatia3	-1.0	0.0	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	120.0	=	120.0
Ecuatia4	0.0	-1.0	-1.0	4.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	20.0	=	20.0
Ecuatia5	0.0	0.0	-1.0	0.0	4.0	-1.0	-1.0	0.0	120.0	=	120.0
Ecuatia6	0.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0	4.0	0.0	-1.0	20.0	=	20.0
Ecuatia7	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	4.0	-1.0	200.0	=	200.0
Ecuatia8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0	4.0	100.0	=	100.0
Conditie	4.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	190.0	=	190.0

Figura 11. Rezultate numerice temperaturi $t_1 \dots t_8$

Rezultatele numerice privind temperaturile în nodurile rețelei de calcul și valorile temperaturilor de pe suprafețele delimitatoare ale secțiunii rectangulare analizate se pot grupa împreună într-o zonă diferită a foii de calcul oferind în final o imagine numerică de ansamblu a câmpului bidimensional de temperatură al secțiunii (figura 12).

95	120	120	120	120	100
70	83.340	86.335	87.244	86.976	80
70	57.024	54.756	55.665	60.660	80
45	20	20	20	20	50

Figura 12. Câmpul bidimensional de temperatură al secțiunii reprezentat numeric

Valorile numerice din figura 12 pot fi transpuse grafic utilizând una dintre multiplele modalități de afișare oferite în acest scop de către aplicația software Microsoft Excel®, de exemplu prin reprezentarea cu ajutorul unor contururi interpolate ca în figura 13.

În lipsa altor precizări tehnice suplimentare nodurile aflate la intersecția a două suprafețe cu temperaturi constante au estimată temperatura ca reprezentând media aritmetică a temperaturilor suprafețelor respective (13):

$$t_{j,Nod(m-n)} = \frac{t_{s,m} + t_{s,n}}{2} \quad (13)$$

Având în vedere datele problemei soluționate se observă că rezultatele obținute sunt identice cu cele prezentate în [2] (figura 14) confirmând rezolvarea corectă a acesteia printr-o implementare diferită pe calculator folosind aplicația Microsoft Excel® și utilizarea unui alt instrument de rezolvare a SEL format (Solver-ul).

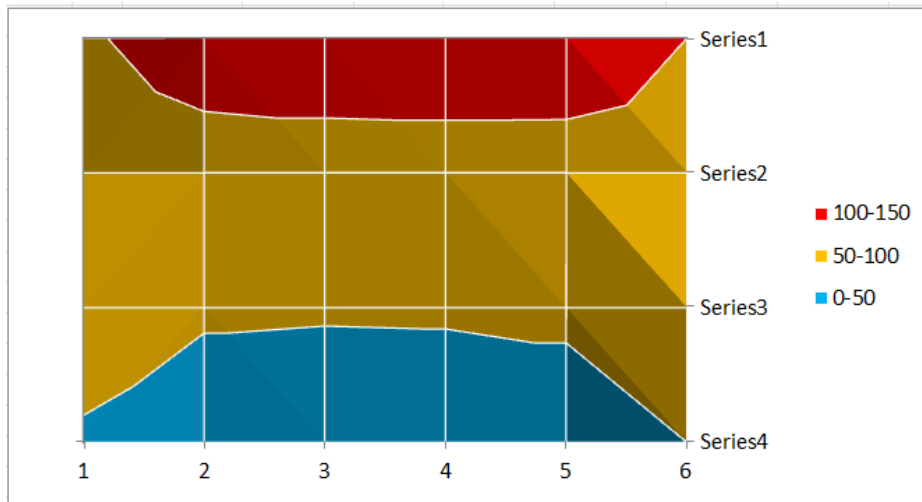


Figura 13. Reprezentarea grafică a câmpului bidimensional de temperatură din secțiune

	1	2	3	4	5	6	
m_temp =	95	120	120	120	120	100	.°C
	70	83.34	86.335	87.244	86.976	80	
	70	57.024	54.756	55.665	60.66	80	
	45	20	20	20	20	50	

Figura 14. Reprezentarea numerică a câmpului de temperatură al secțiunii rectangulare [2]

Instrumentul software creat poate fi utilizat cu succes pentru studiul câmpului bidimensional de temperatură în cazurile în care se modifică valorile temperaturilor pe suprafețele delimitatoare ale secțiunii. De asemenea poate fi adaptat cu un anumit efort de implementare suplimentar pentru utilizarea unui pas diferit de dispunere a nodurilor de calcul a temperaturii și rezolvarea unui alt SEL, eventual mai extins, rafinând soluțiile obținute anterior.

Având în vedere faptul că temperaturile pe suprafețele delimitatoare ale secțiunii au fost implementate ca variabile separate se modifică în celulele din figura 3 valorile temperaturilor respective și se apelează din nou instrumentul Solver folosind aceiași parametri de rezolvare ca cei din figura 10.

Sunt prezentate în figurile următoare atât datele inițiale cât și rezultatele numerice și grafice obținute cu ajutorul instrumentului software pentru următoarele trei cazuri studiate:

- Cazul nr. 1: $t_{s1}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=t_{s3}=t_{s4}=50^{\circ}\text{C}$ (figura 15);
- Cazul nr. 2: $t_{s1}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=60^{\circ}\text{C}$, $t_{s3}=25^{\circ}\text{C}$, $t_{s4}=60^{\circ}\text{C}$ (figura 16);
- Cazul nr. 3: $t_{s1}=30^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s3}=30^{\circ}\text{C}$, $t_{s4}=60^{\circ}\text{C}$ (figura 17).

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

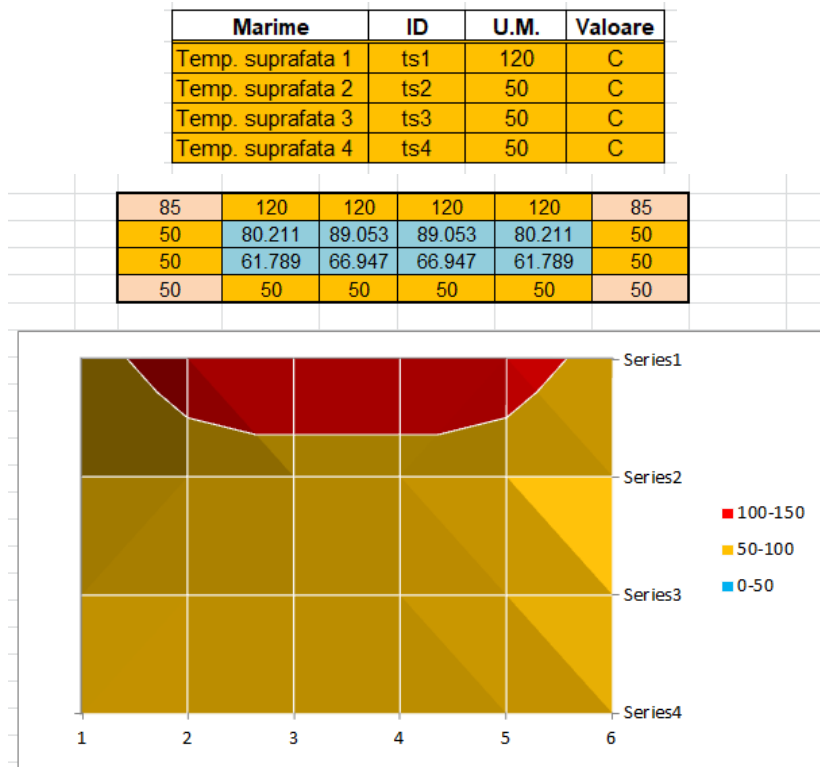


Figura 15. Datele inițiale și reprezentarea numerică și grafică a câmpului bidimensional de temperatură pentru cazul nr. 1: $t_{s1}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=t_{s3}=t_{s4}=50^{\circ}\text{C}$

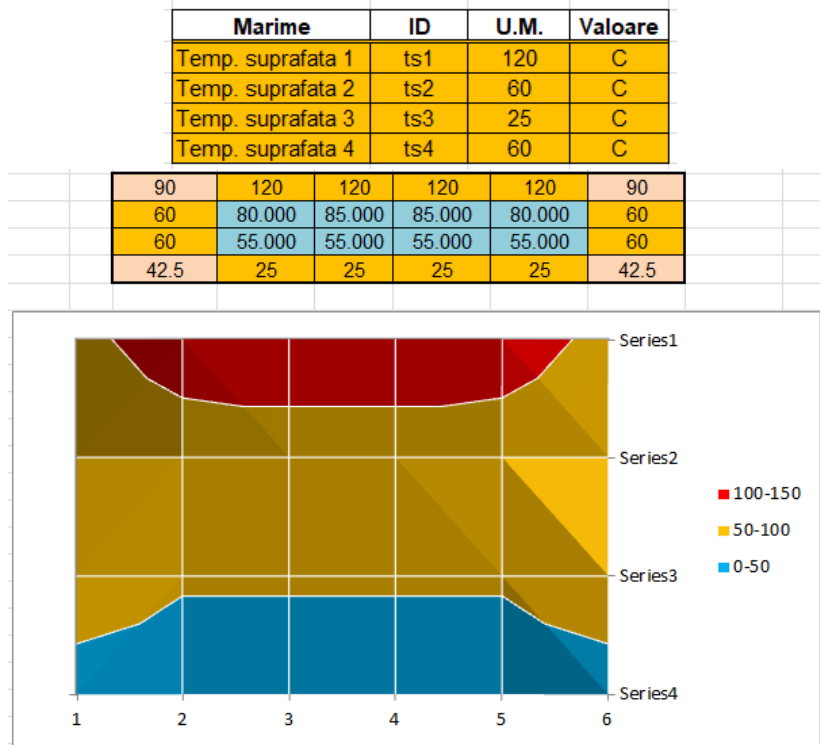


Figura 16. Datele inițiale și reprezentarea numerică și grafică a câmpului bidimensional de temperatură pentru cazul nr. 2: $t_{s1}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=60^{\circ}\text{C}$, $t_{s3}=25^{\circ}\text{C}$, $t_{s4}=60^{\circ}\text{C}$

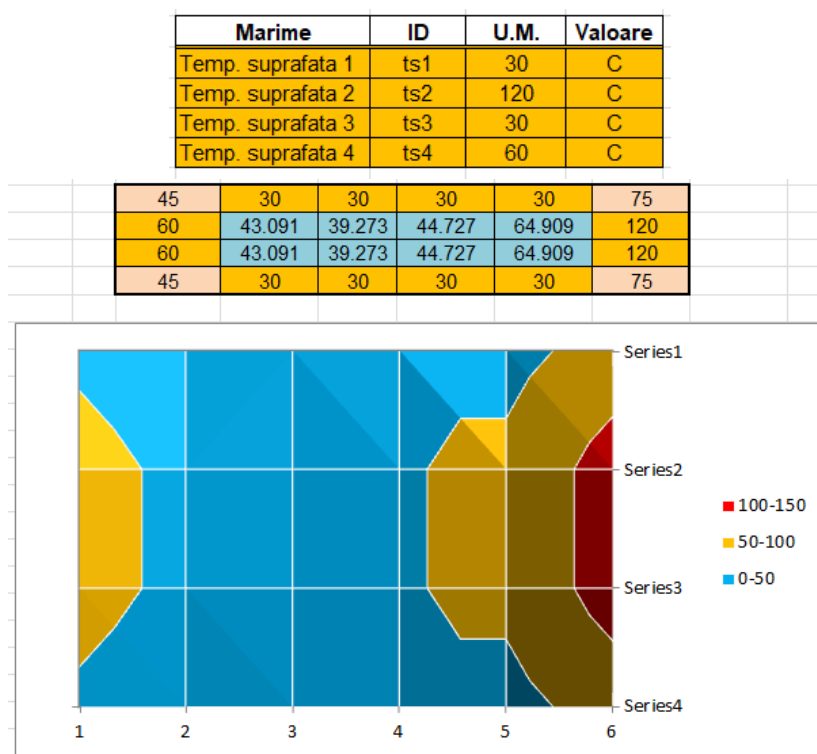


Figura 17. Datele inițiale și reprezentarea numerică și grafică a câmpului bidimensional de temperatură pentru cazul nr. 3: $t_{s1}=30^{\circ}\text{C}$, $t_{s2}=120^{\circ}\text{C}$, $t_{s3}=30^{\circ}\text{C}$, $t_{s4}=60^{\circ}\text{C}$

3. CONCLUZII

Soluționarea problemei de transfer termic bidimensional (2D) a căldurii în regim termic staționar într-o secțiune de formă rectangulară se poate efectua numeric utilizând metoda diferențe finite (MDF), înlocuind ecuația diferențială (2) printr-o ecuație cu diferențe finite (3) și folosind pentru exprimarea temperaturilor în nodurile unei rețele de calcul pătrată relația (7).

Implementarea rezolvării problemei propuse a fost făcută în aplicația software Microsoft Excel® din Microsoft Office® utilizând instrumentul de rezolvare Solver care modifică valorile inițiale precizate de către utilizator în anumite celule pentru a obține apoi în celula-țintă sau obiectiv rezultatul urmărit.

Sistemul de ecuații liniare SEL (9) a fost descris în formă matricială prin relația (10) fiind implementate matricea coeficienților MC (figura 5), vectorul termenilor liberi VTL (figura 6) și o linie suplimentară denumită Condiție utilizată în precizarea obiectivului instrumentului Solver (figura 7 și figura 8).

Rezolvarea numerică a SEL (9) format se face prin utilizarea Solver-ului precizând referința la celula-țintă sau obiectiv, celulele care conțin valorile variabile ale temperaturilor necunoscute, restricțiile / constrângerile care definesc rezolvarea problemei și alegând o metodă de rezolvare potrivită (figura 10).

Rezultatele obținute privind câmpul bidimensional de temperatură al secțiunii rectangulară pot fi reprezentate numeric împreună cu temperaturile de pe suprafețele delimitatoare pentru a oferi o imagine de ansamblu a acestuia (figura 12) sau pot fi reprezentate grafic pentru o vizualizare mai intuitivă folosind o anumită modalitate de

Determinarea numerică a câmpului bidimensional de temperatură într-o regiune plană în regim termic staționar rezolvată în Microsoft Excel

afișare oferită utilizatorului în acest scop de către aplicația software Microsoft Excel® (figura 13).

Datorită implementării ca variabile separate a temperaturilor pe suprafețele delimitatoare ale secțiunii rectangulare pot fi studiate diverse situații în care valorile temperaturilor respective generează o anumită încărcare termică simetrică sau asimetrică. Prin apelarea repetată a instrumentului Solver rezultatele numerice sunt apoi calculate rapid, iar afișarea grafică a acestora se face automat.

Instrumentul software prezentat poate fi adaptat cu un anumit efort suplimentar de implementare pentru analiza unor câmpuri de temperatură mai detaliate modificând în acest scop pasul de dispunere a nodurilor în cadrul rețelei rectangulare utilizate. Dacă totuși numărul acestora devine foarte ridicat, exprimarea temperaturilor în noduri și formarea sistemului de ecuații liniare devine mai dificilă fiind preferabilă în acest caz utilizarea unei aplicații pentru calculator dedicate care să genereze automat și să rezolve SEL respectiv.

Instrumentul de analiză și calcul automat al transferului de căldură bidimensional (2D) prezentat în lucrare este util atât studenților de la Facultățile de Instalații care studiază transmiterea căldurii în mai multe dimensiuni cât și specialiștilor din domeniu interesați de rezolvarea practică a acestor tipuri de aplicații inginerești.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Chisăliță, G.A., Transmiterea căldurii, Note de curs, 2010-2019.
- [2] Chisăliță, G.A., Calculul numeric al câmpului bidimensional de temperatură în regim termic staționar într-o regiune rectangulară rezolvat în Mathcad, Conferința “Știința Modernă și Energia”, Editura RISOPRINT, Cluj-Napoca, ISSN 2066-4125, 2017, pp. 180-193.
- [3] Bergman, T.L., Lavine, A.S., Incropera, F.P., Dewitt D.P., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7th edition, ISBN 978-0470-50197-9, John Wiley & Sons, Inc., 2011, pp. 83-87, 230-261.
- [4] Cengel, Y.A., Ghajar A.J., Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications, 5th edition, ISBN 978-0073398181, McGraw-Hill Education, 2014, pp. 62-86, 269-311.
- [5] Leonăchescu, N., Termotehnică, E.D.P, București, 1981, pp. 251-258, 342-361.
- [6] Oprețoiu, A., Termotehnică și aparate termice – Transmiterea căldurii, Litografia I.P.C.-N., Cluj-Napoca, 1992, pp. 11-16, 37-40.
- [7] Lienhard IV, J.H., Lienhard V, J.H., A Heat Transfer Textbook, 4th edition, ISBN 0-486-47931-5, Dover Publications Inc., 2011, pp. 49-77, 234-247.
- [8] Popa B., Vintilă C., Transfer de căldură în procese industriale, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1975, pp. 88-93.
- [9] Leonăchescu, N. ș.a., Probleme de termotehnică, E.D.P, București, 1977, pp. 225-237.
- [10] Muntea, C., Câmpeanu, A., Transfer de căldură – Probleme, ISBN 973-95386-2-2, Editura Ana, Cluj-Napoca, 1997, pp. 38-40.