

Obținerea unei expresii analitice pentru distribuția anuală a concentrațiilor de ozon (O₃)

Obtaining an analytical expression for the annual distribution of ozone concentrations (O₃)

prof. dr. ing. Florin Iordache - UTCB – FII, Romania

prof. dr. ing. Vlad Iordache - UTCB – FII, Romania

Rezumat

In lucrare se prezinta o procedura bazata pe transformata Fourier, utilizata in stabilirea unei forme analitice pentru o baza de date de tip serie de timp, privind concentratiile de ozon. Observatiile facute asupra bazei de date au condus la identificarea unor forme analitice pentru doua oscilatii suprapuse, oscilatia lunata si oscilatia diurna care in final se insumeaza.

Abstract

The paper presents a procedure based on Fourier transform, analytical forms used in establishing a database for a type of time series on ozone concentrations. The observations made over the database has led to the identification of two forms analytical oscillations superimposed monthly oscillation and diurnal oscillation which finally are summed.

Obiectivul lucrării îl constituie stabilirea unei proceduri bazate pe expresii analitice în vederea evaluării concentrațiilor de ozon într-o localitate din România. În cazul de față localitatea la care se face referire este municipiul București.

În prima etapă s-a stabilit o bază de date cu valori orare ale concentrațiilor de ozon în municipiul București, bază de date continuând 8760 de valori medii pe o perioadă de timp de câțiva ani.

În vederea stabilirii procedurii operative de calcul, metoda de calcul stabilită presupune două etape și anume :

- Determinarea unei expresii analitice pentru stabilirea valorii medii zilnice a concentrației de poluant;
- Determinarea unei expresii medii orare de abatere a concentrației de poluant de la valoarea medie zilnică, funcție de ora din zi la care se dorește evaluarea concentrației poluantului;

Etapizarea mai sus descrisă a rezultat din vizualizarea fluctuației efective a distribuției concentrației de poluant din baza de date neprelucrate. S-a observat aici și

alura oscilatiei anuale a concentratiilor de poluant cat si alura oscilatiei zilnice. A rezultat in consecinta ca oportuna stabilirea in prima etapa a unei expresii analitice pentru oscilatia anuala, pe baza valorilor medii lunare ale concentratiilor de poluant. In continuare, pe fiecare luna in parte, pe baza valorilor medii orare s-a stabilit mai intai ziua medie lunara reprezentativa, pentru care s-au stabilit expresiile analitice aferente celor 12 luni ale anului.

Dat fiind ca reprezentarea grafica a datelor din baza de date mentionata indica forme periodice s-a optat pentru identificarea unor sume de oscilatii armonice adica pentru utilizarea transformatei Fourier in prelucrarea datelor conform metodei descrise.

Teoria utilizata pentru obtinerea expresiilor analitice atat in ceea ce priveste evolutia anuala a valorilor medii lunare cat si in ceea ce priveste evolutiile zilnice ale valorilor medii lunare a fost :

$$f(\tau) = A_0 + \sum_{q=1}^{\infty} [A_q \cos(2\pi \frac{\tau}{T} q) + B_q \sin(2\pi \frac{\tau}{T} q)] \quad (1)$$

T – intervalul de timp (perioada dacă se consideră o funcție periodică) ;
1/T – frecvența fundamentală;

Sau discret :

$$f_n = A_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \left[A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) \right] \quad (2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$T = N \cdot \Delta\tau \quad (3)$$

N – se alege par

unde :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n, \quad q = 0; \\ A_q &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right), \quad q = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}; \\ B_q &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right), \quad q = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}; \end{aligned} \quad (4)$$

pentru $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Obtinerea unei expresii analitice pentru distributia anuala a concentratiilor de ozon (O₃)

$$f_n^* = A_0 + \sum_{q=1}^{N/2} \left[A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) \right]$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$f_n^* = F_0 + F_{n,1} + F_{n,2} + \dots + F_{n,q} + \dots + F_{n,\frac{N}{2}} \quad (5)$$

unde :

$$F_{n,q} = A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right)$$

In cazul primei etape unde s-a analizat descompunerea in serie fourier a setului de 12 valori numerice aferente mediilor lunare ale concentratiilor de poluant. Din prelucrarea bazei de date continand cele 8760 de valori orare, pentru intreg anul a rezultat:

Tabel 1.

Luna	Concentratie (ppb)	Luna	Concentratie (ppb)
Ianuarie	30.29	Iulie	71.03
Februarie	60.78	August	61.80
Martie	61.51	Septembrie	52.69
Aprilie	71.91	Octombrie	34.43
Mai	71.79	Noiembrie	28.70
Iunie	66.98	Decembrie	19.56

In fig. 1 se prezinta forma grafica a mediilor lunare ale concentratiilor de poluant:

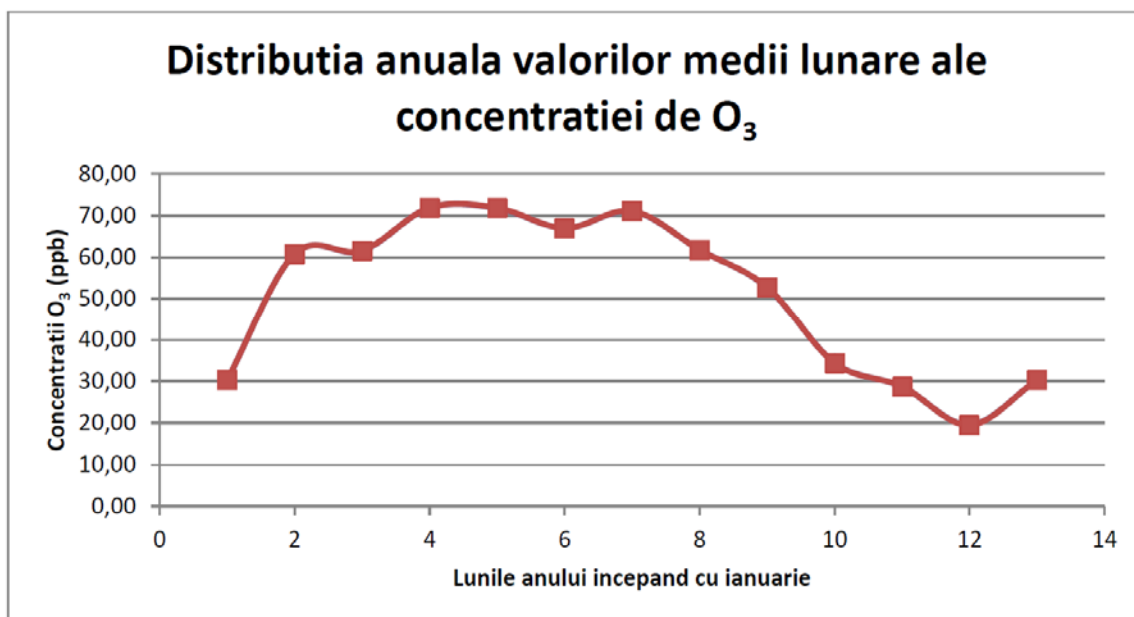


Fig. 1

Expresia analitica a functiei de aproximare este data de relatia (5):

$$f_n^* = A_0 + \sum_{q=1}^{N/2} \left[A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) \right]$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$f_n^* = F_0 + F_{n,1} + F_{n,2} + \dots + F_{n,q} + \dots + F_{n,\frac{N}{2}} \quad (5)$$

unde :

$$F_{n,q} = A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right)$$

In care :

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$;

$q = 1, 2, \dots, N/2$;

$N = 12$;

Iar valorile rezultate pentru coeficienti sunt prezentate in tabelul 2:

Tabel 2

A0	52,62		
A1	-16,64	A4	-0,71
B1	17,61	B4	3,22
A2	-1,30	A5	-2,66
B2	7,18	B5	2,62
A3	-1,08	A6	0,09
B3	1,49	B6	0,00

In fig. 2 se prezinta forma grafica a oscilatiei fundamentale si ale armonicelor si valoarea medie.

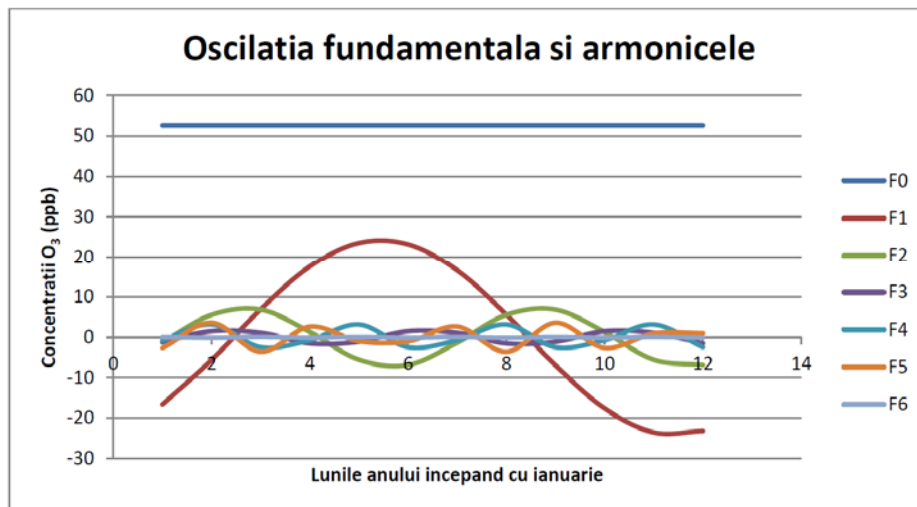


Fig. 2

Obtinerea unei expresii analitice pentru distributia anuala a concentratiilor de ozon (O₃)

Aplicand relatia de insumare (51) rezulta practic o forma identica cu forma functiei numerice prezentate in fig. 1. Daca se utilizeaza numai 4 termeni din suma se obtine deja o aproximare destul de buna, prezentata in fig. 3

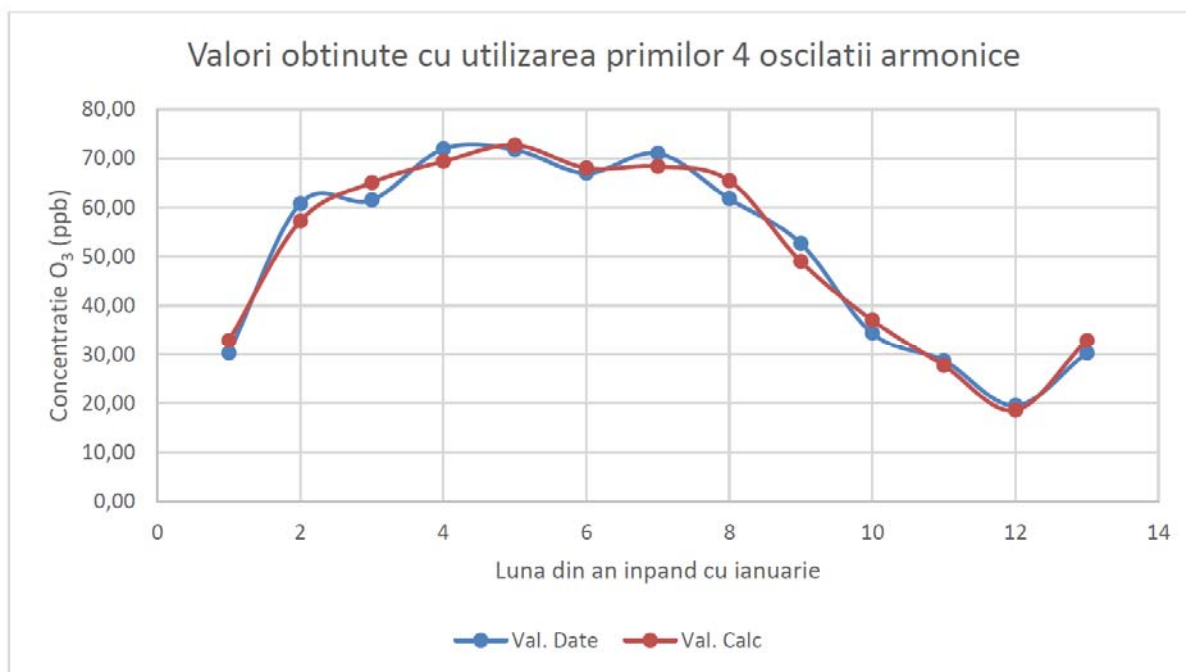


Fig. 3

Acelasi mod de punere a problemei a fost abordat si in cazul stabilirii unor forme analitice pentru variatia diurna a concentratiei de poluant. De fapt de aceasta data s-au stabilit variatia diurna a abaterilor concentratiilor de poluant de la valoarea medie lunara stabilita in etapa anterioara, asa incat in prima faza s-au stabilit abaterile orare fata de valoarea medie a lunii respective. In continuare, s-au stabilit variatiile diurne ale acestor abateri pentru fiecare din lunile anului in parte. Valorile orare care compun variatia diurna s-au obtinut ca medii aritmetice ale celor cca. 30 de valori zilnice de la ora respectiva. Au rezultat in acest fel zilele medii reprezentative pentru fiecare din lunile anului, compuse din abaterile orare fata de media lunara.

Procedura de lucru este asemanatoare cu cea mai inainte prezentata pentru variatia anuala a mediilor lunare ale concentratiilor de poluant. Se va exemplifica pentru cazul lunii ianuarie. Ziua medie, rezultata ca reprezentativa pentru luna ianuarie, in ceea ce priveste abaterile orare fata de media lunara a concentratiei de poluant din aceasta luna, s-a stabilit prin determinarea valorilor orare ale acestor abateri, ca medii aritmetice pe cele 31 de zile ale lunii ianuarie sunt prezentate in tabelul 3 :

ORA	Abateri Concentratie (ppb)	ORA	Abateri Concentratie (ppb)
1	-5,02	13	3,97
2	-4,32	14	12,10
3	-3,06	15	16,08
4	-2,40	16	18,50
5	-2,74	17	18,36
6	-2,20	18	12,42
7	-2,28	19	3,26
8	-6,06	20	-2,35
9	-10,75	21	-3,86
10	-13,10	22	-4,20
11	-8,25	23	-5,95
12	-2,98	24	-5,35

In fig. 4 se prezinta variatia diurna reprezentativa a abaterilor concentratiei de O₃ fata de media lunii ianuarie

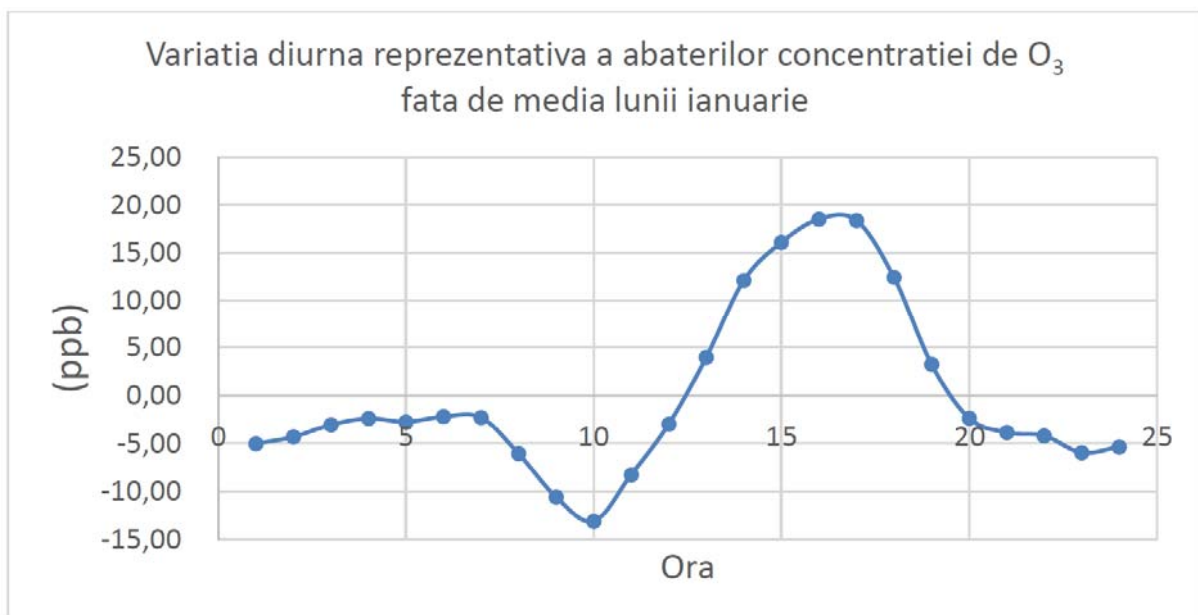


Fig.4

Obtinerea unei expresii analitice pentru distributia anuala a concentratiilor de ozon (O3)

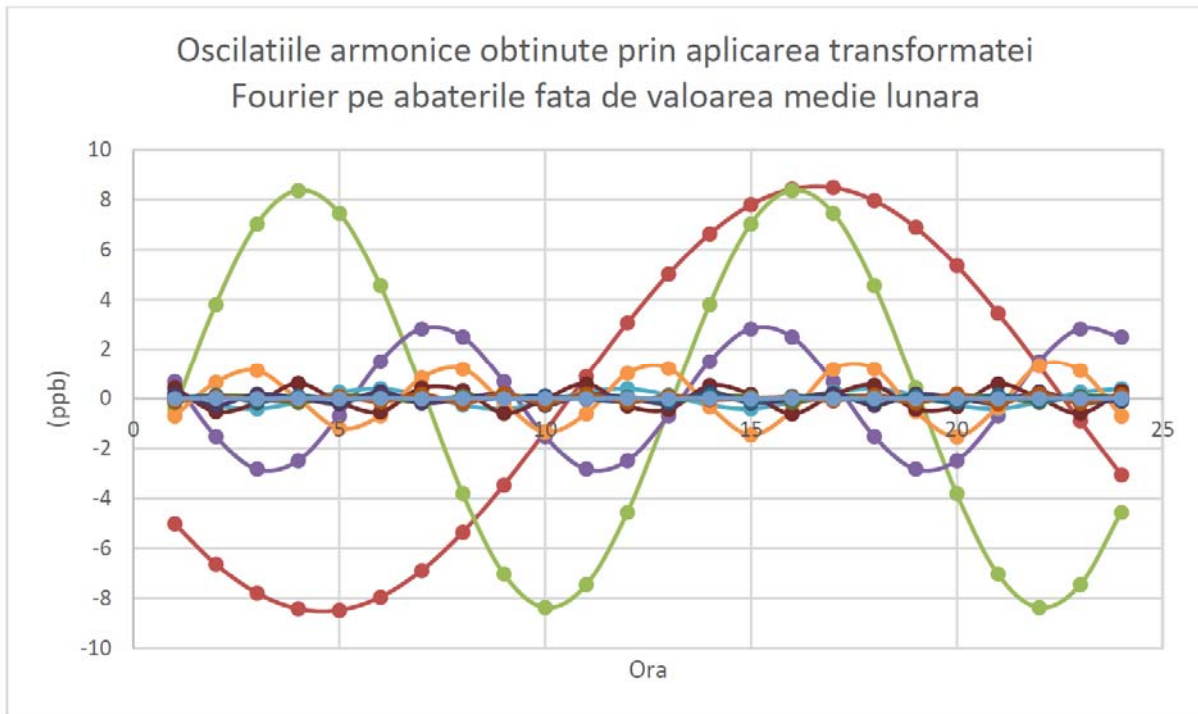


Fig. 5

In fig. 5 se prezinta oscilatiile armonice obtinute prin aplicarea transformatei fourier pe abaterile fata de valoarea medie lunara.

Daca se considera numai primele 6 din oscilatiile obtinute si se insumeaza se obtine o aproximare acceptabila pentru variatia reala cautata a se exprima analitic (Fig. 6).

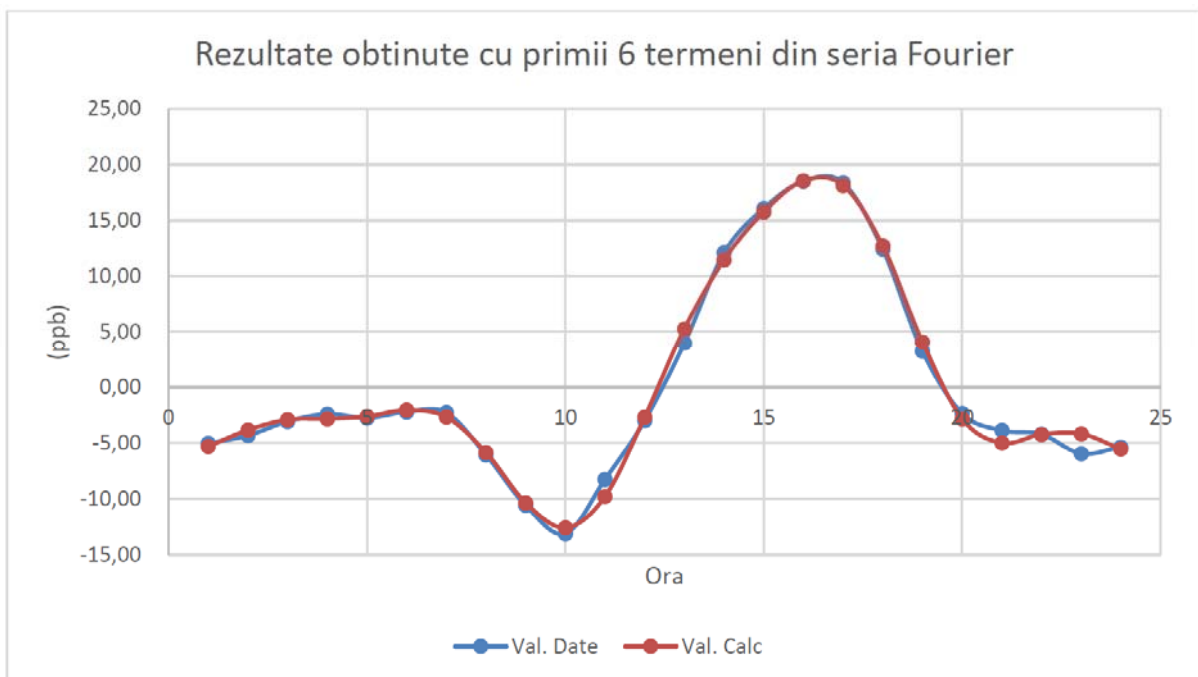


Fig. 6

Expresia analitica a functiei de aproximare este data de relatia (5) :

$$f_n^* = A_0 + \sum_{q=1}^{N/2} \left[A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) \right]$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_n^* = F_0 + F_{n,1} + F_{n,2} + \dots + F_{n,q} + \dots + F_{n,\frac{N}{2}} \quad (5)$$

unde :

$$F_{n,q} = A_q \cos\left(2\pi \frac{n}{N} q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{n}{N} q\right)$$

In care :

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

$$q = 1, 2, \dots, N/2;$$

$$N = 24;$$

Iar valorile rezultate pentru coeficienti sunt prezentate in tabelul 4:

Tabel 4

A0	0,00		
A1	-5,02	A7	0,44
B1	-6,90	B7	-0,42
A2	-0,44	A8	-0,16
B2	8,36	B8	0,02
A3	0,69	A9	0,21
B3	-2,83	B9	-0,18
A4	0,15	A10	-0,10
B4	-0,39	B10	0,10
A5	-0,71	A11	-0,11
B5	0,88	B11	-0,17
A6	0,03	A12	-0,01
B6	0,11	B12	0,00

Verificarea procedurii prezentate.

Momentul verificarii va fi de exemplu : ora 17 din data de 23 ianuarie. Ca timp inseamna $\tau = 22 \times 24 + 17 = 545$ h si prima expresie analitica aplicata pentru determinarea valorii medii a concentratiei de O3 va fi :

Obtinerea unei expresii analitice pentru distributia anuala a concentratiilor de ozon (O3)

$$f_{545}^* = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

unde :

$$F_{545,0} = 52,62 \tag{6}$$

$$F_{545,q \neq 0} = A_q \cos\left(2\pi \frac{545}{8760} \cdot q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{545}{8760} \cdot q\right)$$

Se obtine valoarea 52,25 ppb, pentru media zilnica din data de 23 ianuarie. In continuare trebuie aflata abaterea corespunzatoare orei 17. Se va utiliza o forma asemenatoare relatiei (6) si anume :

$$f_{17}^* = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$$

unde :

$$F_{17,0} = 0,00 \tag{7}$$

$$F_{17,q \neq 0} = A_q \cos\left(2\pi \frac{17}{24} \cdot q\right) + B_q \sin\left(2\pi \frac{17}{24} \cdot q\right)$$

Se obtine pentru abaterea corespunzatoare orei 17 valoarea de 11,99 ppb. In consecinta adunand abaterea la valoarea medie zilnica rezulta: 64,25 ppb. Valoarea corespunzatoare orei 17 din 23 ianuarie din baza de date a fost : 64,60 ppb. Eroarea rezultata este de 0,54%, care poate fi considerata acceptabila.

Lista de Notatii

T – intervalul de timp, perioada, s;

N – numarul total de valori discrete cunoscute, ale functiei cautate, -;

n – indice cuprins in intervalul 0, ..., N-1, -;

q – rangul armonice, parametru in domeniu 1, ..., N/2, -;

A₀, A_q, B_q – coeficienti in cadrul seriei de functii armonice, -;

f_n – valoarea numerica cunoscuta a functiei cautate, la momentul discret n, -;

f_n^{*} - valoarea de aproximatie a functiei cautate la momentul discret n, -;

Bibliografie

Peter Bloomfield – Fourier Analysis of Time Series, an Introduction – John Wiley & Sons, Inc. – 2000;