Analiza numerică a câmpului de viteze şi temperaturi într-o secţiune transversală a unei conducte eliptice în cazul convecţiei forţate a căldurii în regim laminar

The numerical analysis of the field of speeds and temperatures in a cross section of an elliptical pipe in the case of heat forced convection in the laminar regime

Ş.L. dr. Ing. Anton IOSIF
Universitatea Politehnica Timisoara, Romania

Rezumat
Această lucrare prezintă rezultatele numerice obţinute cu Metoda Reciprocităţii Duale la soluţionarea ecuaţilor de tip Poisson care se utilizează la calculul vitezelor şi temperaturilor în anumite puncte din interiorul unei conducte de secţiune eliptică prin care se deplasează un fluid în cazul convecţiei forţate a căldurii în regim laminar.

Cuvinte cheie*: conductă, secţiune eliptică, convecţie căldurii în regim laminar, flux de căldură, analiză numerică, metoda reciprocităţii duale.*

Abstract
This paper presents the numerical results obtained through the Dual Reciprocity Method for solving.
Poisson type equations which are used for calculus of velocity and temperature in certain points inside a circular duct with fluid flowing through, in the case of forced convective heat flow in the laminary regime. For validation of the results obtained with the Dual Reciprocity Method it was necessery to compare them with the analytical ones.

Keywords: *pipe, elliptical section, heat convection in the laminar regime , heat flow, numerical analysis, reciprocity dual method*

1. Introducere

Menţionăm că sunt multe ecuaţii liniare şi parţial neliniare în diferite domenii ale ştiinţei şi ingineriei. Soluţia acestor ecuaţii se poate obţine prin diferite metode. În anii actuali studiul analitice ale ecuaţiilor liniare sau neliniare, au captivat atenţia unui număr mare de autori. Soluţiile analitice, numerice sau seminumerice ale ecuaţile liniare sau neliniare, sau ecuaţii parţial diferenţiale au fost studiate intens în anii recenţi.

Metoda elementului de frontieră (MEFr) este o tehnică numerică de rezolvare a problemelor de frontieră reprezentate de ecuaţii diferenţiale, parţial diferenţiale şi are avantaje importante [1]. Un avantaj important al acestei metode este că înlocuieşte problema originală cu o ecuaţie integrală definită pe frontiera domeniului soluţiei.

În cazul ecuaţiei diferenţiale parţial omogene, MEFr necesită doar discretizrea pe domeniul de frontieră [3]. Dacă domeniul de smulare este un domeniu cu o curgere potenţială, ecuaţia cara guvernează este cunoscută ca fiind ecuaţia lui Laplace. Metoda elementului de frontieră permite calcularea soluţiei pentru formula integrală de a ecuaţiei Laplace prin discretizarea problemei de frontieră în elemente separate, fiecare conţinând un număr de noduri de colocaţie.

Ecuaţia integrală de frontieră obţinută din ecuaţia Poisson are on domeniu de integrat. În MEFr au fost dezvoltate diferite metode pentru rezolvarea acestui domeniu integral. Aceste metode au în comun calea de integrare prin celule. Pentru soluţionarea acestei probeme a fost dezvoltata Metoda Reciprocităţii Duale (MRD) care evită integrarea pe celule aşa cum se procedează în cazul MEFr [3], [4].

2. Ecuaţia Navier-Stokes şi a energiei

Ecuaţia Navier-Sokes şi a energiei se scriu într-o secţiune perpendiculară pe axa oz a conductei, utilizând sistemul cartezian de coordonate, astfel:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz} \qquad (1)$$

în w este viteza fluidului după direcţia axei oz . Relaţia analitică a vitezei se scrie astfel [7]

$$w(x,y)=\frac{dp}{2\eta dz}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \qquad (2)$$

Vom considera frontiera Γ a elipsei ca fiind solidă şi impenetrabilă, ceea ce permite impunerea condiţiei Dirichlet $w=0$ pe aceasta.

Se demonstrează fără dificultate, că derivata normală a vitezei w are relaţia:

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{dp}{\eta dz}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left[\frac{x}{a^2}\cos(n,x)+\frac{y}{b^2}\cos(n,y)\right] \qquad (3)$$

iar pentru cosinusurile directoare avem relaţiile:

$$\cos(n,x)=\frac{x}{a}\ ;\ \ \cos(n,y)=\frac{y}{b} \qquad (4)$$

Ecuaţia ecuaţia energiei, dacă vom nota cu $T^*=T_W-T$, se scrie sub forma:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}=-\frac{w}{a}\frac{dT_m}{dz} \qquad (5)$$

în care în care T_w este temperatura frontierei solide, iar T este temperatura fluidului. Din cele precizate se deduce simplu că poate impune condiţia $T^* = 0$ pe frontiera Γ a elipsei.

Ecuaţiile de tip Poisson (1) şi (5) se soluţionează numeric utilizând MRD utilizând condiţii Dirichlet astfel: $w = 0$ şi $T^* = 0$ pe frontiera Γ a elipsei. Valorile vitezei w se determină în fiecare punct stabilit în domeniul de analiză, prin soluţionarea ecuaţiei (2) cu MRD.

3. Metoda Reciprocităţii Duale

Elementele de bază ale acetei metode sunt prezentate în referinţele [2], [3], [4], pentru ecuaţii de forma:

$$\nabla^2 u = b \qquad (6)$$

în care avem $b = const$.

Soluţia u a ecuaţiei (6) este dată de soluţia $\tilde{u}$ a ecuaţiei lui Laplace şi o soluţie particulară, astfel:

$$u = \tilde{u} + \hat{u} \qquad (7)$$

Dacă ţinem seama de relaţiile (6) şi (7) vom obţine că:

$$\nabla^2 \hat{u} = b \qquad (8)$$

MRD presupune utilizarea unei serii limitate soluţiei particulare dată de funcţia globală $\hat{u}$. În conformitate cu [3], [4] pentru b se propune utilizarea următoarei extensii:

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j F_j \qquad (9)$$

unde α_j sunt iniţial necunoscute şi F_j este funcţia asociată punctului j.

Soluţia particulară pentru $F_j = r$ se poate obţine utilizând referinţele [2], [3] în care se precizează că:

$$\nabla^2 \hat{u}_j = F_j = r \qquad (10)$$

în care $\hat{u}$ are forma:

$$\hat{u} = \frac{r^3}{9} \tag{11}$$

Funcţia de distanţă r poate să fie interpretată ca un element component al seriei de puteri, iar F se scrie sub următoarea formă generală:

$$F = \sum_{m=1}^{p} r^m \tag{12}$$

Ecuaţia (10) poate să fie extinsă la diferite puncte j, rezultând ecuaţia:

$$[\nabla^2 \boldsymbol{\hat{u}}_j] = [\boldsymbol{F}_j] = \boldsymbol{F} \tag{13}$$

Partea dreaptă a ecuaţiei (13) este o matrice de dimensiunea $(N + L) \times (N + L)$, iar vectorul coloană $\boldsymbol{F}_j$ are dimensiunea $(N + L)$ pentru fiecare nod. Menţionăm că fiecare elementul al matricei $\boldsymbol{F}$ se obţine astfel:

$$F_{ij} = 1 + r_{ij} + r_{ij}^2 + .. + r_{ij}^p \tag{14}$$

Dacă ţinem seama de cele precizate, scrie următoarea relaţie:

$$F_{ij}\alpha_j = b_i \tag{15}$$

unde b_i este valoarea funcţiei b în nodul i. Acum, dacă vom ţine seama de ecuaţia matriceală:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{16}$$

se pot calcula elementele vectorului $\boldsymbol{\alpha}$ dacă funcţia $b(x, y)$ este cunoscută. Acum vom multiplica ecuaţia (9) cu $\boldsymbol{\alpha}$ şi se obţine:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} F_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{N+L} (\nabla^2 u)\alpha_j \tag{17}$$

Această relaţie reprezintă ecuaţia de bază pentru MRD. Dacă utiliz~~ăm~~ te~~hn~~ica elementului de frontieră ecuaţiei (17) şi multiplicăm cu soluţia fundamentală $u^* = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ şi integrăm prin părţi , vom obţine:

$$c_i u_i + \int_\Gamma u^* q \, d\Gamma + \int_\Gamma q^* u \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \left\{ \alpha_j \left[c_i \hat{u}_{ij} + \int_\Gamma \hat{u}_j \, q^* d\Gamma - \int_\Gamma \hat{q}_j u^* d\Gamma \right] \right\} \tag{18}$$

După discretizarea frontierei se obţine următoarea ecuaţie:

$$\boldsymbol{H\,u} - \boldsymbol{G\,q} = \sum_{j=1}^{N+L} \boldsymbol{\alpha}_j \left(\boldsymbol{H\,\hat{u}}_j - \boldsymbol{G\,\hat{q}}_j \right) \tag{19}$$

în care $\boldsymbol{H}$ şi $\boldsymbol{G}$ sunt notaţiile uzuale, respectiv
$q = \dfrac{\partial u}{\partial n}$, $\hat{q} = \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial n}$.

Menţionez că: funcţia F, soluţia particulară $\hat{u}$, derivata normală $\hat{q}$ a soluţiei particulare au în conformitate cu [2], [3], [4], următoarele relaţii:

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + .. + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2} \tag{20}$$

$$\hat{q} = -\left(\bar{x}\frac{\partial x}{\partial n} + \bar{y}\frac{\partial y}{\partial n} \right)\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} + .. + \frac{r^m}{m+2} \right) \tag{21}$$

unde $\bar{x}$, y sunt două componente ale funcţiei de distanţă r:

$$\bar{x} = x_j - x_i \quad ; \qquad \bar{y} = y_j - y_i \tag{22}$$

În ecuaţia (19) coeficienţii c_i sunt incorporaţi în coeficienţii H_{ii} de pe diagonala principală a matricei $\boldsymbol{H}$, iar din acest motiv se calculează doar H_{ii} cu relaţia:

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} H_{ij} \; ; \; i = 1,2,\ldots,N \tag{23}$$

Ecuaţia(19) se scrie şi sub următoarea formă matriceală:

$$\boldsymbol{H\,u} - \boldsymbol{G\,q} = \left(\boldsymbol{H\,\hat{U}} - \boldsymbol{G\,\hat{Q}} \right)\boldsymbol{\alpha} \tag{24}$$

4. Rezultate numerice

Rezultatele numerice s-au obţinut în cazul convecţiei forţate a căldurii in regim laminar într-o conductă de secţiune eliptică cu axa mare $a = 0.05m$ şi axa mică $b = 0.045m$. Menţionăm că în ecuaţia (1) vom considera $dp/\eta\, dz = -83.6 m^{-1}\, s^{-1}$ şi în ecuaţia (5) difuzivitatea termică este $a = 1{,}342 \times 10^{-9}\, m^2 \setminus s$, iar $dT_m / dz = 0.047 ^\circ C / m$.

Rezultatele numerice au fost obţinute cu ajutorul programelor: DISCPE.FOR, DRMVTE.FOR, DRMTEE.FOR. Primul program realizează discretizarea frontierei solide Γ într-un număr finit N noduri şi NE de elemente liniare, de asemenea determină coordonatele celor L puncte din interiorul domeniului de analiză Ω. Programul doi soluţionează cele L valori ale vitezei w şi N valori ale derivatei normale a vitezei, iar programul trei soluţionează cele L valori ale temperaturii T^* şi cele N valori ale derivatei normale ale lui T^*. Programele CAVICE.FOR şi DNAVICE.FOR calculează vitezele analitice şi derivatele normale ale acestora.

Valorile obţinute in tabelul 1 sunt obţinute pentru cazul: numărul de noduri $N = 18$, numărul elementelor de frontieră $NE = 18$, iar numărul punctelor din interiorul domenilui de analiză este $L = 91$.

Tabel 1.

Rezultate analitice şi numerice pentru derivatele normale ale vitezei w şi temperaturii T^*

Nr. nod	Coordonate		$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{AN.}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{NUM.}$	$\left(\frac{\partial T^*}{\partial n}\right)_{NUM.}$
	x [m]	y[m]			
1	0,050000	0,00000	-1,87060	-1,82808	17095,9
2	0,04635	0,01687	-1,89982	-1,86245	17593,6
3	0,03657	0,03068	-1,96726	-1,93886	18759,7
4	0,02305	0,03993	-2,03426	-2,01142	19946,9
5	0,00783	0,04444	-2,07334	-2,05207	20617,8
6	-0,00783	0,04444	-2,07334	-2,05207	20615,0
7	-0,02305	0,03993	-2,03426	-2,01141	19945,1
8	-0,03657	0,03068	-1,96726	-1,93888	18767,5
9	-0,04635	0,01687	-1,89982	-1,86243	17594,6
10	-0,05000	0,00000	-1,87060	-1,82810	17091,5
11	-0,04635	-0,01687	-1,89982	-1,86242	17591,3
12	-0,03657	-0,03068	-1,96726	-1,93888	18765,1
13	-0,02305	-0,03993	-2,03426	-2,01141	19949,1
14	-0,00783	-0,04444	-2,07334	-2,05208	20612,9
15	0,007836	-0,04444	-2,07334	-2,05207	20622,1
16	0,23054	-0,03993	-2,03426	-2,01142	19940,6
17	0,03657	-0,03068	-1,96726	-1,93886	18764,0
18	0,04635	-0,01687	-1,89982	-1,86244	17595,5

Tabelul 2.
Rezultate obţinute cu DRM pentru viteze, temperaturi şi derivate normale, pentru $F = 1 + r$

Variabile	Coordonate		MRD(Elemente liniare)		
	x[m]	y[m]	N=18, L=91	N=30 L=151	Valori analitice
$w_{max.}$ [m/s]	0.0000	0.0000	0,046769	0,046766	0.046765
$T^*_{max.}$ [^oC]	0.0000	0.0000	685,55	686,19	-
w [m/s]	0,008333	0,000000	0,045469	0,045467	0,045466
w [m/s]	0,016666	0,000000	0,041566	0,041567	0,041569
w [m/s]	0,025000	0,000000	0,035062	0,035069	0,035073
w [m/s]	0,033333	0,000000	0,025956	0,025972	0,025980
w [m/s]	0,041666	0,000000	0,014234	0,014275	0,014289
T^* [^oC]	0,008333	0,000000	659,82	660,68	-
T^* [^oC]	0,016666	0,000000	584,76	585,71	-
T^* [^oC]	0,025000	0,000000	467,42	468,32	-
T^* [^oC]	0,033333	0,000000	319,47	320,01	-
T^* [^oC]	0,041666	0,000000	149,88	157,64	-
$\partial w / \partial n$ [s^{-1}]	0.050000	0,000000	-1,828086	-1,854929	-1,870608
$\partial T^* / \partial n$ [$^oC/m$]	0,050000	0,000000	17095,88	17358,69	-

5. Concluzii

Rezultatele numerice obţinute cu MRD, care sunt centralizate în tabelul 2, sunt foarte bune având în vedere că erorile relative absolute ε_w ale vitezelor sunt mai mici de 0,40[%] şi derivatelor normale ale acestora au eroarea ε_{dnw} dată în procente în intervalul [0,84;2,27] cu observaţia că valoarea mai mică este pentru $N = 30$ şi $L = 151$.

Bibliografie

[1] Brebbia C. A., Telles J. C. F. and Wrobel L. C. - *Boundary Element Techniques*, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[2] Iosif A. - *The Possibility of Using the Boundary Element Method for Solving Poisson Type Equations*, Buletinul Ştiinţific al Universităţii "Politehnica", din Timişoara, Tom 45 (59), Seria mecanică, fascicola 2, 2000, pp. 63-70.

[3] Partridge W. and Brebbia A. C. - *Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of General Field Equation*, Communication in Applied Numerical Methods, Vol.6, 1990, pp. 83-92.

[4] Partridge P. W., Brebbia C. A. and Wrobel L. C. - *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, International Series on Computational Engineering, Computational Mechanics and Esevier Applied Science, Southampton, UK, 1992.

[5] Sârbu I., Iosif A. - *Numerical Analysis of the Laminar Forced Heat Convection Between Two Coaxial Cylinders*, Int. Journal of Energy, Issue 4, Vol.3, pp.51-58, 2009.

[6] Ştefănescu D., ş.a., - *Transfer de căldură şi masă*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[7] Landau L., Lifchitz E. - *Mécanique des fluides*, Éditions MIR Moscou, 1988.